MOND et le principe de Mach

G. Paturel, Nice, 29 novembre 2010

Introduction

En Relativité Générale, la gravitation n'est pas une loi qui s'applique dans un univers géométrique préexistant *a priori*. La gravitation au contraire crée la géométrie de l'univers. Ainsi, la géométrie varie d'un point à un autre selon le contenu en énergie et impulsion de l'univers physique.
On peut se poser la question de savoir comment ce principe pourrait se traduire dans la mécanique de Newton ou celle de la Relativité Restreinte.
Il est évident que la gravitation (ou l'inertie) joue un rôle particulier parmi toutes les interactions connues. Ce rôle tient à la masse (ou énergie) et à l'inertie. C'est bien en étudiant le sens de l'accélération qu'Einstein a bâti la Relativité Générale dont les résultats éclatants et la beauté logique ont validé les concepts.
Les idées de Mach ont joué un rôle important dans la genèse de cette théorie, même si Mach n'en a pas accepté les développements.
Nous allons rediscuter le principe de Mach, non sous la forme d'un référentiel en rotation[1], mais sous celle d'un référentiel en accélération linéaire.

Traduction du principe de Mach pour une accélération linéaire

Le point de départ des réflexions de Mach et Einstein était la foi en l'absence d'accélération absolue. En imaginant par exemple un monde totalement vide de matière à l'exception d'une particule test unique, on peut se poser la question de savoir si une accélération serait détectable quand nous appliquerions une force à cette particule test.
Sans entrer dans une discussion trop détaillée, il semble effectivement qu'on ne peut pas définir de temps et donc de longueur sans matière, donc pas de force ni d'accélération. Ce point est discuté par ailleurs (Paturel, 2010) et ne sera pas détaillé ici. Ce point de vue rejoint celui de Leibniz ou de Friedmann ("*L'Univers comme espace et temps*" de G. Friedmann 1923, in "Essais de Cosmologie" de Luminet et Grib, 1997), selon lequel seul l'univers physique (avec de la matière[2]) a un sens. C'est donc la Matière qui permet de créer le temps et l'espace, c'est-à-dire l'univers physique. Se repose alors la question :
Dans cet univers physique l'accélération absolue a-t-elle un sens ? Il semble au premier abord qu'on doive répondre par la négative, sauf de prendre pour référence, le centre de gravité de toutes les masses de l'univers. Cependant, une analyse plus poussée nous oblige à nuancer notre réponse. Tout d'abord, si l'univers physique est fait d'énergie et d'impulsion, cela sous-entend qu'il y a des mouvements. C'est une évidence, nous en sommes les témoins. Un calcul, impossible à faire pratiquement, mais que l'on peut concevoir, nous montrerait que l'on ne peut pas calculer la position de ce centre de gravité à un instant donné à cause du temps de propagation de l'information de position. Un observateur peut faire le calcul pour son temps propre, mais c'est un calcul relatif qui n'a pas le caractère absolu qu'on cherche. Il n'y donc pas d'accélération absolue, même en considérant l'ensemble de la distribution de la matière. La réponse serait qu'une accélération ne peut se calculer que localement, par rapport à la matière visible et figée à l'instant de la mesure.
Il découle de ce point de vue qu'une accélération quelconque (notée $\boldsymbol{A}$) ne peut se mesurer que localement par rapport au centre de gravité apparent de la matière environnante à cet instant.

---

[1] Dans "La théorie des champs", Landau et Lifchitz (Chapitre X, §81) font remarquer que le champ créé par un référentiel tournant n'est pas tout à fait identique à un champ gravitationnel réel. Ils disent qu'un champ créé par un référentiel en mouvement rectiligne accéléré est plus général et manifestement équivalent à un champ gravitationnel uniforme mais variable.
[2] En fait, Energie et Impulsion. Ce que nous désignerons par la "Matière".

Comment trouver la position du centre de gravité de la distribution générale de la matière environnante à un instant donné ? C'est naturellement la direction du vecteur du champ local newtonien (noté $\boldsymbol{A}_n$) qui nous donnera la direction de l'accélération effective (notée $\boldsymbol{A}_e$) produite par $\boldsymbol{A}$, puisque c'est $\boldsymbol{A}_n$ qui décrit globalement la distribution de masse à l'instant considéré. Toute composante de $\boldsymbol{A}$ qui n'est pas dans la direction de $\boldsymbol{A}_n$, n'aura aucun effet mesurable sur la masse test à laquelle elle est sensée s'appliquer (elle ne serait même pas définissable au sens de Mach).
Par ailleurs, le module de l'accélération effective doit s'annuler si $\left|\boldsymbol{A}_n\right| = 0$. Cette condition s'écrit :
$$\left|\boldsymbol{A}_n\right| = 0 \Rightarrow \left|\boldsymbol{A}_e\right| = 0$$
Notons que même si nous refusons d'envisager le cas d'un univers complètement vide pour les raisons expliquées plus haut, le cas $\left|\boldsymbol{A}_n\right| = 0$ peut exister si la distribution de matière (et plus généralement d'énergie) est exactement isotrope.
La relation la plus générale qui satisfait à la condition précédente est :
$$\left|\boldsymbol{A}_e\right| \propto \left|\boldsymbol{A}\right|^{\alpha} \left|\boldsymbol{A}_n\right|^{\beta},$$
α et β étant deux constantes telles que $\alpha+\beta=1$ (pour respecter l'homogénéité des unités).
Cette condition devrait s'appliquer à l'accélération $\boldsymbol{A}_{\mathrm{n}}$ elle-même. C'est-à-dire :
$$\left|\boldsymbol{A}_n\right| \propto \left|\boldsymbol{A}_n\right|^{\alpha} \left|\boldsymbol{A}_n\right|^{\beta}$$
La symétrie de l'expression montre que $\alpha=\beta$. De plus, puisque pour le champ gravitationnel nous pouvons supposer que le champ effectif se confond avec le champ lui-même, nous déduisons que la constante de proportionnalité vaut un.
Des deux conditions :
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha = \beta \end{cases}$$
, on tire $\alpha=\beta=1/2$, d'où :

$$\left|\boldsymbol{A}_e\right| = \sqrt{\left|\boldsymbol{A}\right| \cdot \left|\boldsymbol{A}_n\right|} \qquad (1)$$

Ce résultat et la discussion qui a précédé peuvent se comprendre en utilisant "l'école du fil" de M. Andrade dans ses *Leçons de Mécanique Physique,* citées par H. Poincaré dans son livre la *Science et l'Hypothèse*. L'idée est d'imaginer qu'une interaction physique, entre un corps et un point de l'espace voisin, est comme un fil qui relie ce corps et le point. Si une force agit sur le corps, c'est le fil qui transmet la force. Supposons que l'extrémité du fil soit reliée à un point où il n'y a aucune masse, la force ne pourra pas s'exercer, il n'y aura pas d'accélération. Si maintenant, nous considérons qu'il y a une masse au point considéré, l'accélération apparaîtra, mais la masse se déplacera aussi pour satisfaire la loi de conservation de la quantité de mouvement.

Prenons un autre cas. Nous supposons maintenant que l'action agit entre le corps et tous les points de l'espace. Ce sera comme si le corps était relié à tous les points voisins par une infinité de fils. Comme précédemment, si aucune masse n'est attachée aux extrémités de tous ces fils, l'action sur le corps sera sans effet. Ce cas trivial correspond au cas de l'univers vide que nous réfutions. Mais s'il y a des masses au bout de chaque fil et si la distribution des masses apparaît parfaitement isotrope, alors l'accélération ne se manifestera pas, le corps étant attiré également dans toutes les directions. Seule l'anisotropie de la distribution de masse peut révéler une accélération produite par une force exercée sur un corps.

Application à "MOND"

La courbe de rotation des galaxies ne suit pas une loi képlérienne. Cette observation est complètement validée et ne souffre pas de contestation. La seule explication retenue est que l'univers doit être baigné d'une matière nouvelle non encore détectée, la matière noire.

Pour représenter la courbe de rotation des galaxies sans faire appel à la matière noire, Milgrom (1983) a imaginé de modifier la dynamique de Newton de manière *ad hoc*. Sa dynamique newtonienne modifiée (MOND) est la suivante :

Milgrom suppose que le module de l'accélération newtonienne est donné par la loi empirique :

$$a_n = a_e \cdot \mu(\frac{a_e}{a_0})$$

Où μ est une fonction satisfaisant aux propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \mu(x) = x \quad (x \to 0) & \Rightarrow \quad a_e = \sqrt{a_n a_0} \\ \mu(x) = 1 \quad (x \to \infty) & \Rightarrow \quad a_e = a_n \end{cases} \qquad (2)$$

Dans ces relations, a_n et a_e sont les accélérations respectivement newtonienne (GM/r^2) et "dynamique" (V^2/r) ; a_0 est une constante ayant la dimension d'une accélération.

Milgrom ne propose aucune forme précise pour l'expression de la fonction $\mu(x)$. La fonction doit simplement satisfaire les conditions limites (2). Cette modélisation fonctionne remarquablement bien, ce qui explique l'intérêt que l'on y porte.

Appliquons les résultats déduits du principe de Mach vus au paragraphe précédent. Imaginons qu'une accélération nouvelle (dirigée vers le centre de la galaxie considérée), de module a_0, ne dépendant ni de la distance, ni de la masse, s'ajoute à l'attraction newtonienne a_n. Le module de l'accélération nouvelle s'appliquant sur le corps sera alors $a=(a_n+a_0)$ et celui de l'accélération effective correspondante sera d'après (1) :

$$a_e = \sqrt{a_n(a_n + a_0)}$$

On voit que cette relation satisfait aux conditions :

$$\begin{cases} a_n << a_0 & \Rightarrow \quad a_e = \sqrt{a_n a_0} \\ a_n >> a_0 & \Rightarrow \quad a_e = a_n \end{cases}$$

Ces conditions ne sont pas exactement celles demandées par MOND, car elles sont jugées sur a_n et non sur a_e, mais le comportement de a_e est le même que celui demandé par MOND, près ou loin du centre de la galaxie considérée. Une application pratique (figure ci-dessous) montre la courbe de rotation déduite (en bleu), la courbe newtonienne (en rouge) et la courbe observée (en noir).