Gravitation – Références – Astronomie – Métrologie

Development of Techniques to Study the Dynamic of Highly Eccentric Elliptical Orbit

Guillaume Lion

Journées de la SF2A

Paris, 20-23 juin 2011

Observatoire de la CÔTE d'AZUR

Géo AZUR

TERRE - OCÉAN - ESPACE

CNRS INSU

dépasser les frontières

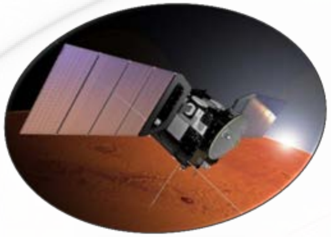
Observer & comprendre

SF2A

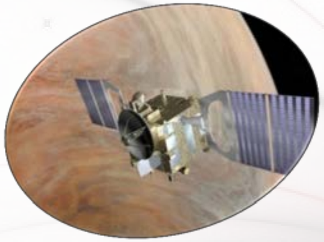
SOCIÉTÉ FRANÇAISE D'ASTRONOMIE & D'ASTROPHYSIQUE

Introduction

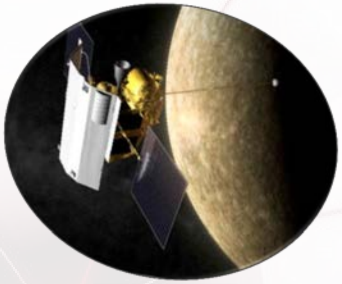
Missions spatiales en cours…



MEX (e=0.61)

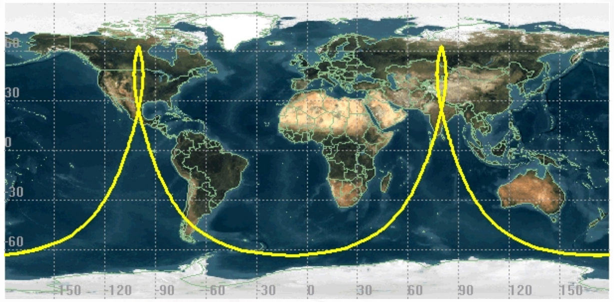


VEX (e=0.84)



Messenger (e=0.74)

Trace orbite Tundra



Trace orbite Molniya

Autres :

- Orbites de transfert géostationnaire (GTO)
- Débris spatiaux
- Certains satellites placés sur des orbites Molniya et Tundra

Intérêts scientifiques

- Géodésie
- Planétologie
- Débris spatiaux
- Observation de l’Univers
- Dans le cadre de la loi spatiale
- etc…

Futures missions

- MMS (NASA / 2014)
- Proba-3 (ESA / 2016)
- STE-QUEST (ESA / présélectionné en M3)

Numérique

privilégie la précision (court intervalle de temps)

Analytique

privilégie la compréhension dynamique, les moyens d'analyse et la rapidité de calcul (grand intervalle de temps)

Outils traditionnels de la mécanique spatiale

$\Downarrow$

Très mal adaptés aux orbites très excentriques (HEO) autant sur le plan analytique que numérique

HEO = Problèmes

Méthodes Numériques

- Loi des aires : - variation de position et vitesse élevée au périgée
  - variation de position et vitesse faible à l'apogée

$\Rightarrow$ Problème pour intégrer l'équation du mouvement du satellite

- Equation de Kepler plus difficile à résoudre
- Problème de stabilité des fonctions d'excentricité classiques

Solutions proposées

- Réduction du pas d'intégration ou pas variable
- Technique de régularisation d'orbite
- Utilisation d'intégrateurs dits géométriques
- Equation de Kepler : choisir un algorithme adéquate
- Utiliser des relations de récurrence

Méthodes Analytiques

Fonctions perturbatrices développées en excentricité jusqu'à un certain ordre

$\Rightarrow$ converge très lentement ou pas du tout

$\Rightarrow$ perte de précision

Solution proposée

Eviter tout développement en excentricité

Méthodes Numériques

Intégrateur Géométrique

Construit sur la base de la Mécanique Géométrique Discrète

Préserve la structure géométrique

- Forme symplectique
- Invariants et symétries associées
- Intégrabilité
- Réversibilité

Limitations des intégrateurs classiques

- Dissipation de l'énergie
- Invariants varient
- Symétries se brisent
- Très lourds en temps de calcul

Avantages des intégrateurs géométriques

- Grande stabilité à très long terme
- Faible coût de calcul
- Très bonne précision
- Facile à implémenter

Il existe deux familles :

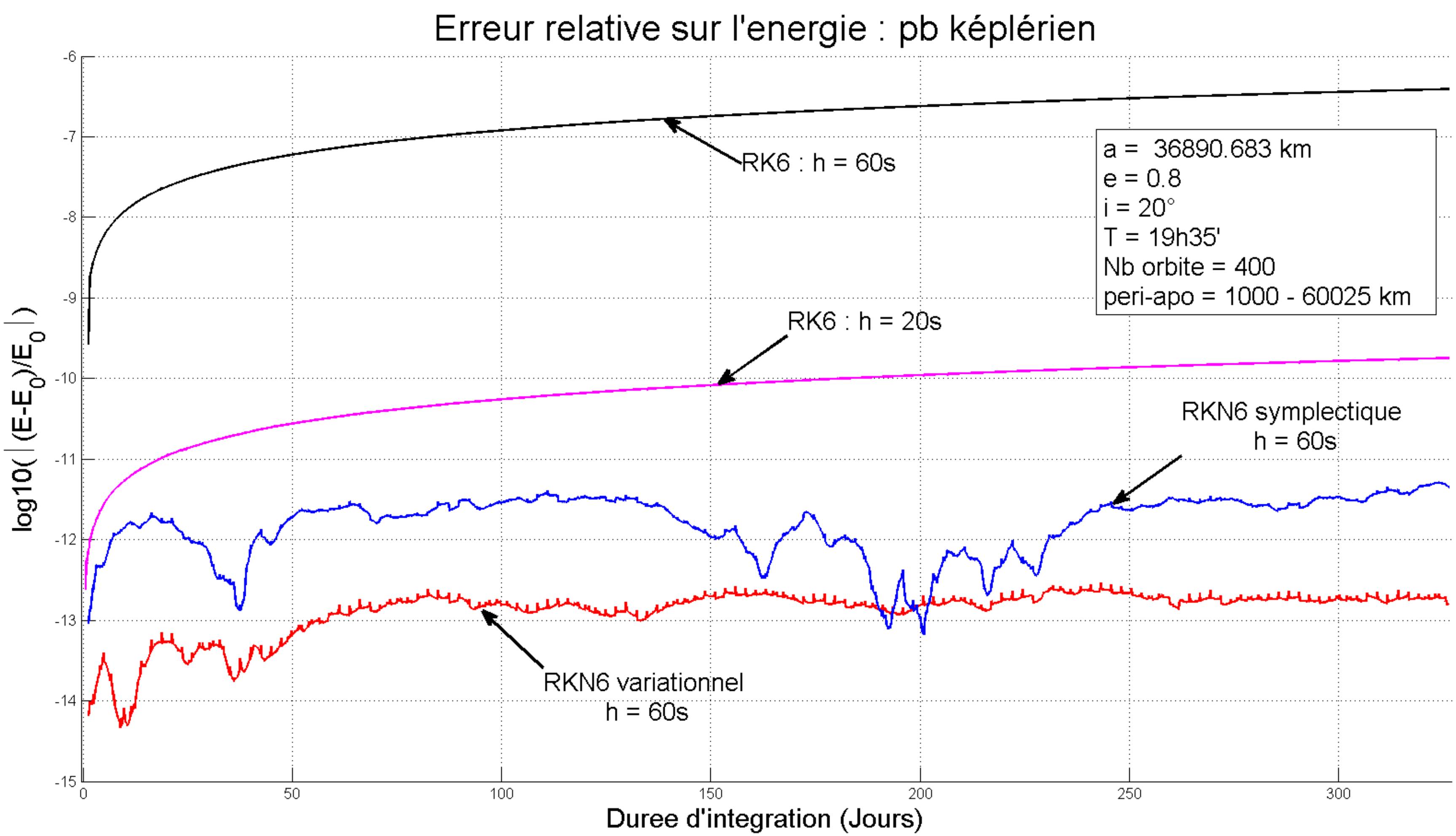
- Intégrateurs symplectiques pour les systèmes Hamiltonien
- Intégrateurs variationnels pour les systèmes Lagrangien/Hamiltonien

Intégrateur Variationnel

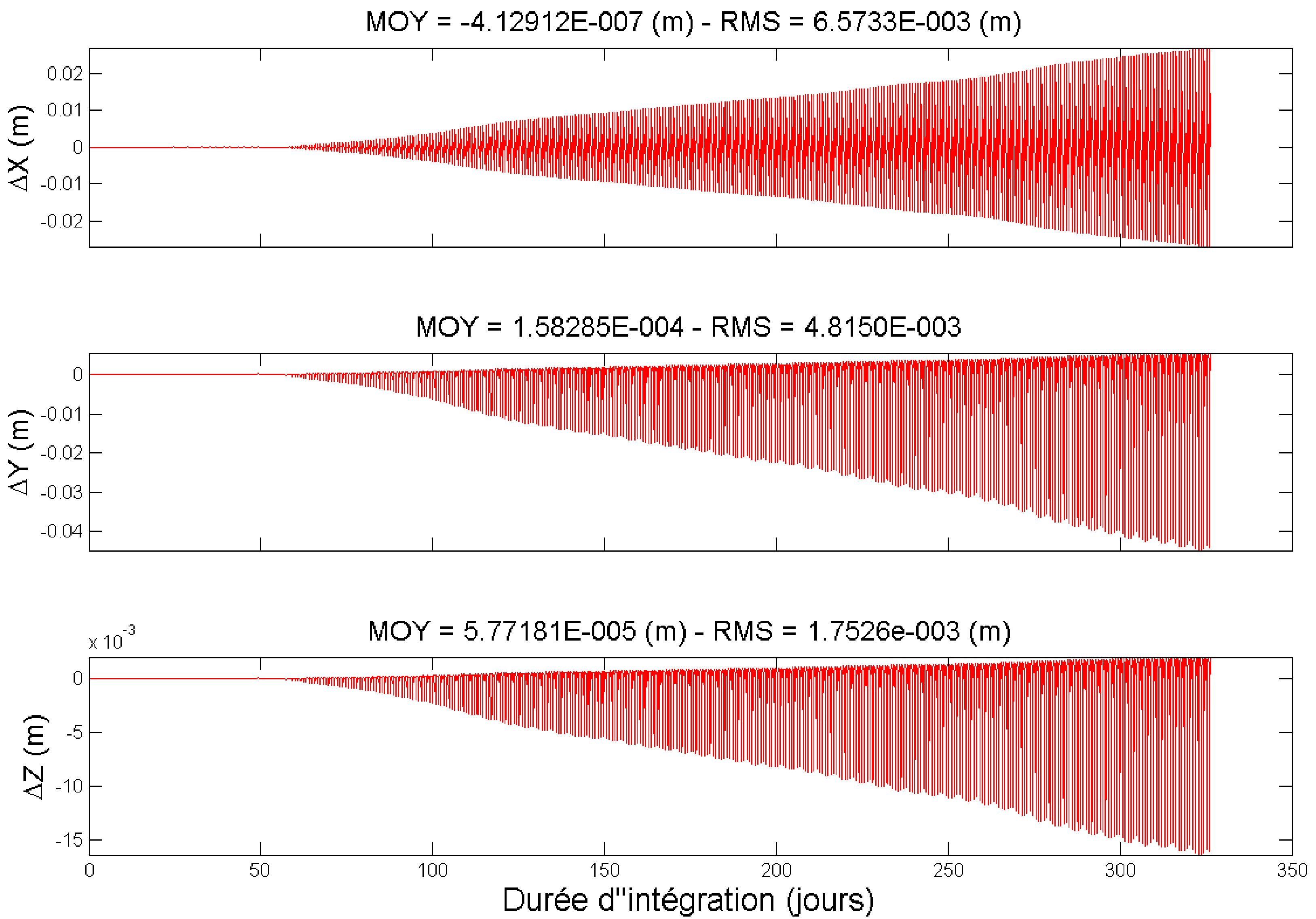
Etapes \ Domaines	Continue	Discret
Lagrangien	$L(q,\dot{q})$	$L_D(q_n, q_{n+1})$
Intégrale d'Action	$S = \int_{t_0}^{t_1} L(q,\dot{q})\, dt$	$S_D = \sum_{n=0}^{N-1} L_D(q_n, q_{n+1})$
Principe variationnel	$\delta S = 0$	$\delta \sum_{n=0}^{N-1} L_D(q_n, q_{n+1}) = 0$
Eq. d'Euler-Lagrange	$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q}\right) = 0$	$D_2 L_D(q_{n-1}, q_n) + D_1 L_D(q_n, q_{n+1}) = 0$
Transformation Legendre	$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$	$p_n = -D_1 L_D(q_n, q_{n+1})$
Eq. d'Hamilton	$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}; \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$	$p_n = -D_1 L_D(q_n, q_{n+1})$ $p_{n+1} = D_2 L_D(q_n, q_{n+1})$

A résoudre

Par exemple : méthode de Galerkin + quadradure de Gauss-Lobatto IIIA + schéma RKN (Runge-Kutta-Nyström)


Erreur relative sur l'energie : pb képlérien
log10(| (E-E0)/E0 |)
Duree d'integration (Jours)
RK6 : h = 60s
RK6 : h = 20s
RKN6 symplectique
h = 60s
RKN6 variationnel
h = 60s
a = 36890.683 km
e = 0.8
i = 20°
T = 19h35'
Nb orbite = 400
peri-apo = 1000 - 60025 km
-6
-7
-8
-9
-10
-11
-12
-13
-14
-15
0
50
100
150
200
250
300

Erreurs : Int. Varia. RKN6 – Solution Analytique -> Pb Képlérien



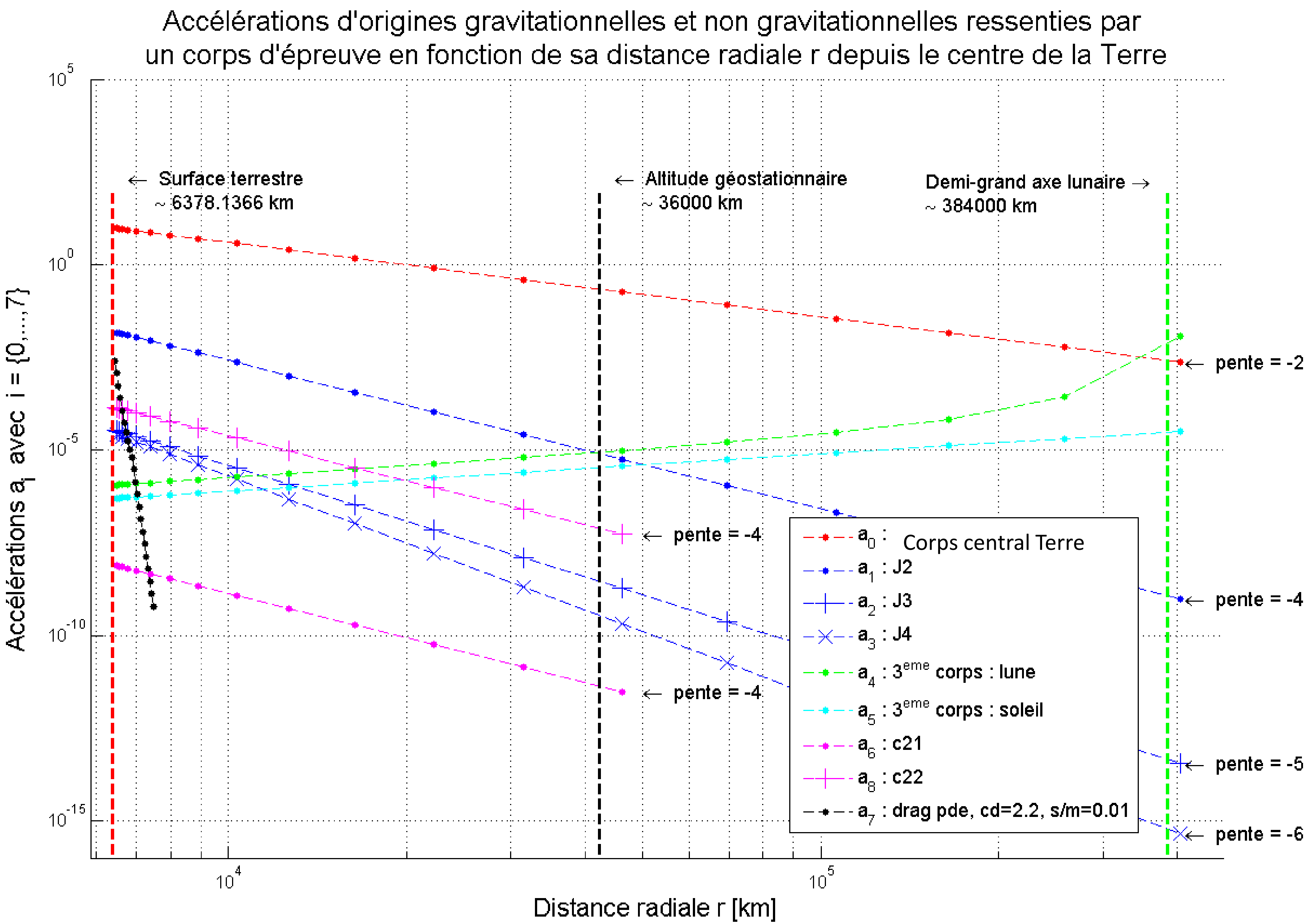
Méthodes Analytiques

Problème non intégrable

(nombre d'invariants différent au nombre de degrés de liberté du système)

Méthodes perturbatives

Pour un système perturbé, permettent d'obtenir une solution approchée pour lequel on connait déjà la solution non perturbée.


Accélérations d'origines gravitationnelles et non gravitationnelles ressenties par
un corps d'épreuve en fonction de sa distance radiale r depuis le centre de la Terre
Accélérations a_i avec i = {0,...,7}
Distance radiale r [km]
← Surface terrestre
~ 6378.1366 km
← Altitude géostationnaire
~ 36000 km
Demi-grand axe lunaire →
~ 384000 km
← pente = -2
← pente = -4
← pente = -4
← pente = -4
← pente = -5
← pente = -6
a_0 : Corps central Terre
a_1 : J2
a_2 : J3
a_3 : J4
a_4 : 3^{eme} corps : lune
a_5 : 3^{eme} corps : soleil
a_6 : c21
a_8 : c22
a_7 : drag pde, cd=2.2, s/m=0.01

Problème principal du Satellite Artificiel J2

-> Hamiltonien du système : $H = K - U$

-> Forme du potentiel perturbateur : $U = \frac{\mu}{r}\left[1 - \left(\frac{R_e}{r}\right)^2 J_2 P_2(\sin\varphi)\right]$

Méthode de Brouwer :

- Consiste à réduire le nombre de degré de liberté du système afin de le rendre intégrable

- On transforme l'hamiltonien par des changements de variables canoniques de façon à ce que l'hamiltonien final ne dépende plus des variables angulaires

Potentiel de 3ème corps

On souhaite construire une théorie pour le 3ème corps sous forme :

- non développée en excentricité (on évite les troncatures et problèmes de convergence)
- compacte
- exprimée en éléments orbitaux
- paramétrable

La fonction perturbatrice de ce problème peut se mettre sous la forme :

$$R = \frac{\mu'}{a'} \sum_{n\geq 2} \sum_{m=-n}^{n} \sum_{m'=-n}^{n} \sum_{p=0}^{n} \sum_{p'=0}^{n} \boxed{\left(\frac{r}{a}\right)^{n} \left(\frac{a'}{r'}\right)^{n+1}} \mathcal{D}_{nmm'pp'}(I, I', \varepsilon) \exp i \left(\Psi_{nmp} - \Psi'_{nm'p'}\right),$$

$$\Psi_{nm'p'} = (n-2p)(\omega+\nu) + m\Omega,$$

$$\Psi'_{nm'p'} = (n-2p')(\omega'+\nu') + m'\Omega'$$

Comment développer ces fonctions en éléments orbitaux?

Potentiel de 3ème corps

Habituellement, on utilise des développements en série de Fourier de l'anomalie moyenne M et de coefficients dépendant de l'excentricité :

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \exp imv = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} X_s^{n,m}(e) \exp imM$$

Problèmes

Quand e est grand : - convergence très lente de ces séries
- divergence des développements en excentricité de $X_s^{n,m}$

Solution proposée

Changer de variable angulaire pour le satellite

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \exp imv = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} Z_s^{n,m}(e) \exp imE$$

- Expression des $Z_s^{n,m}$ toujours finie (Ref. Brumberg & Fukushima (1994))
- Si $0 \leq |m| \leq n$ (vrai pour le pb du 3ème corps) ⇨ séries de Fourier finies

Potentiel de 3ème corps

Utilisation dans une théorie analytique

Outils fondamental dans les théories par transformation canonique

⇒ Quadrature par rapport à l'anomalie moyenne M tel que :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(M)dM$$

Technique classique

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(E)dM = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r}{a} f(E)dE$$

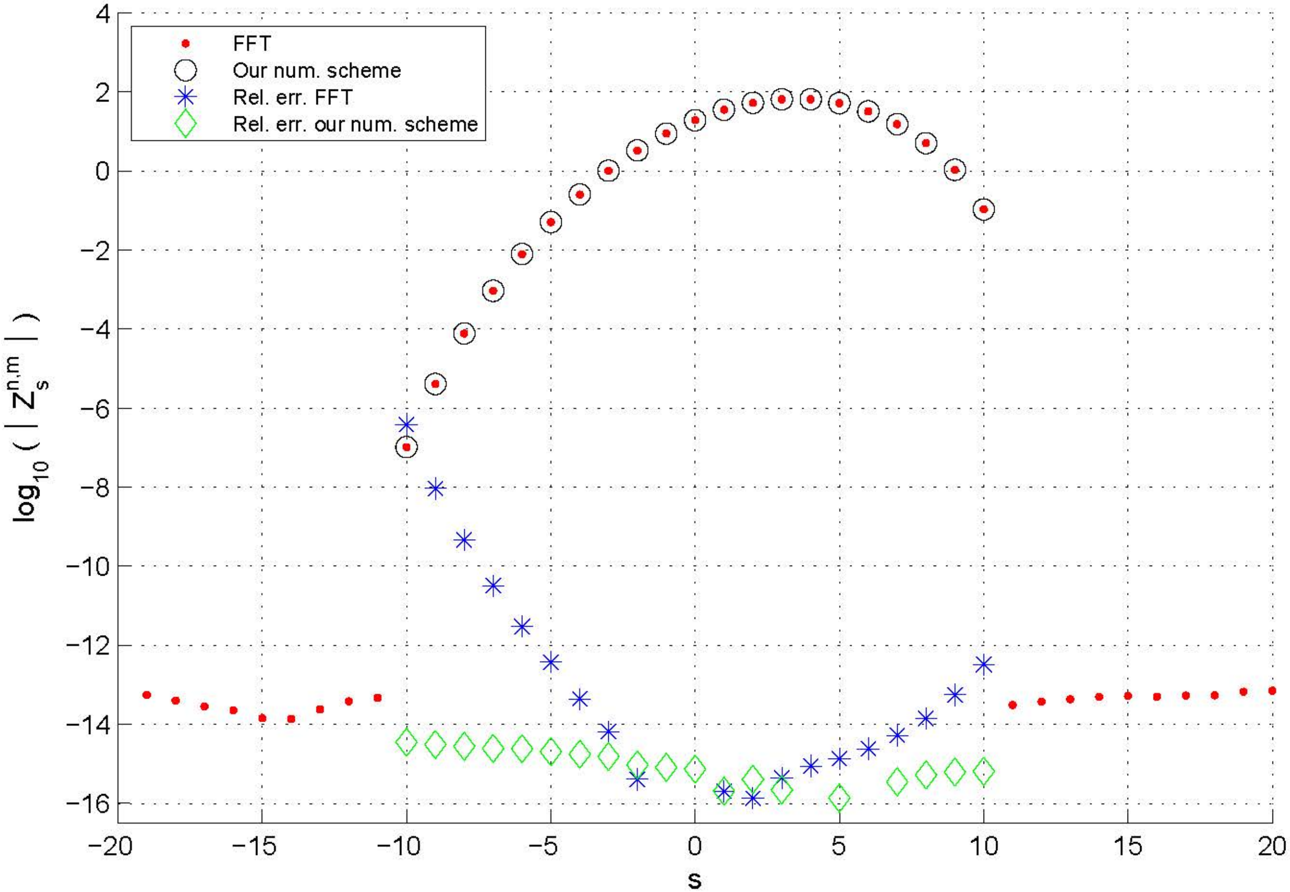
Technique utilisée

Ce qui revient à : $Z_s^{n,m} \rightarrow Z_s^{n+1,m}$

Méthode de calcul de ces coefficients de Fourier Z

- Analyse harmonique (FFT)
- Expressions analytiques
- Relations de récurrence

Coefficients de Fourier Z pour n=m=10 et e=0.8
Transformée de Fourier rapide (FFT) vs Relations de récurrence



Conclusion & Perspectives

Intégrateurs variationnels

- Forme symplectique, conservation des moments, stable, etc…
- Résolution de systèmes quasi-intégrables
- Construction de schéma numérique d'ordre élevé $L = L_{Kepler} + \varepsilon L_{perturbation}$

-> Résolution de systèmes dissipatifs et forcés
-> Intégrateurs à pas variable sans détruire la structure symplectique

Théorie analytique

- Développement d'une théorie du 3ème sous forme compacte et paramétrable

-> Application de l'algorithme de Lie-Deprit
-> Prise en compte de la dépendance temporelle des angles du 3ème corps