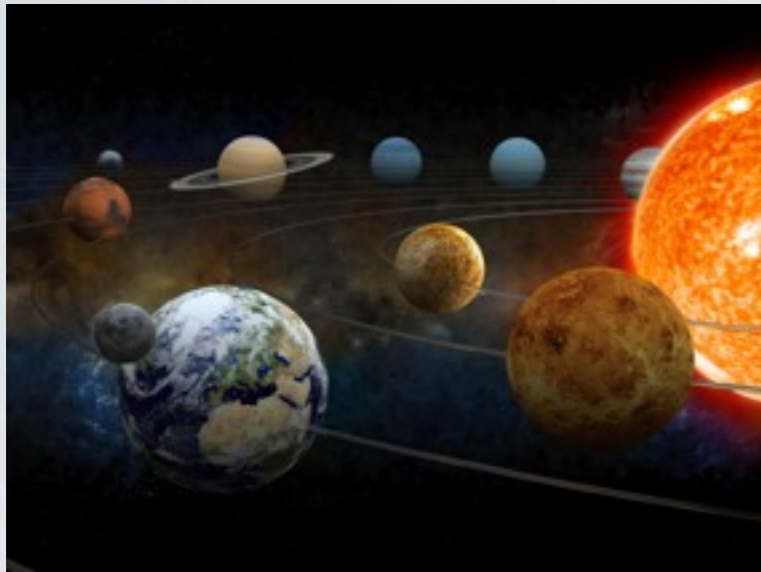




LE POTENTIEL GRAVITATIONNEL DES DISQUES À PARTIR D'UNE FONCTION DE GREEN MOYENNE

Audrey TROVA
SF2A, Nice 6 juin 2012
sous la direction de Jean-Marc Huré et Franck Hersant
Laboratoire d'Astrophysique de Bordeaux

- Potentiel gravitationnel \longrightarrow cohésion et structures des objets (en rotation)
- \longrightarrow instabilités (formation des étoiles)
- \longrightarrow dynamique



Deux manières de le calculer : (Kellogg 1929)

- Formule intégrale : $\Psi(\vec{r}) = -\iiint_v \frac{G\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}|} dv \longrightarrow -G \iiint_v \gamma(r - r')\rho(r') dr'$

(Hachisu 1986)

- Equation de Poisson : $\Delta\Psi = 4\pi G\rho$

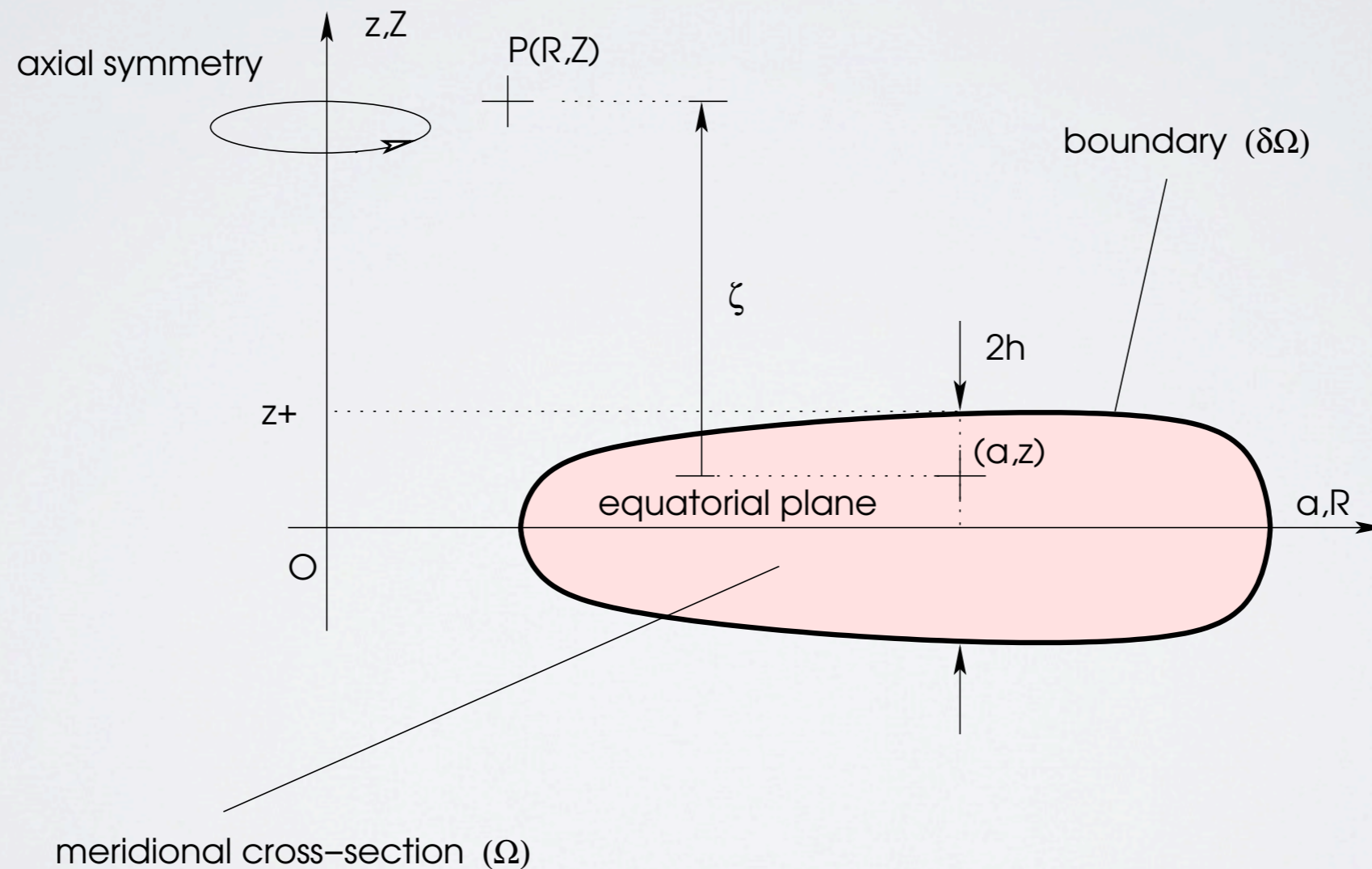
(Bodo&Curir 1992, Fromang et al 2004)

Fonction de Green

- Expression générale du potentiel gravitationnel :

$$\Psi(\vec{r}) = -G \iiint_v \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}|} dv \xrightarrow{\text{symétrie axiale}} \Psi(R, Z) = -2G \iint_{\Omega} \sqrt{\frac{a}{R}} \rho(a, z) kK(k) da dz$$

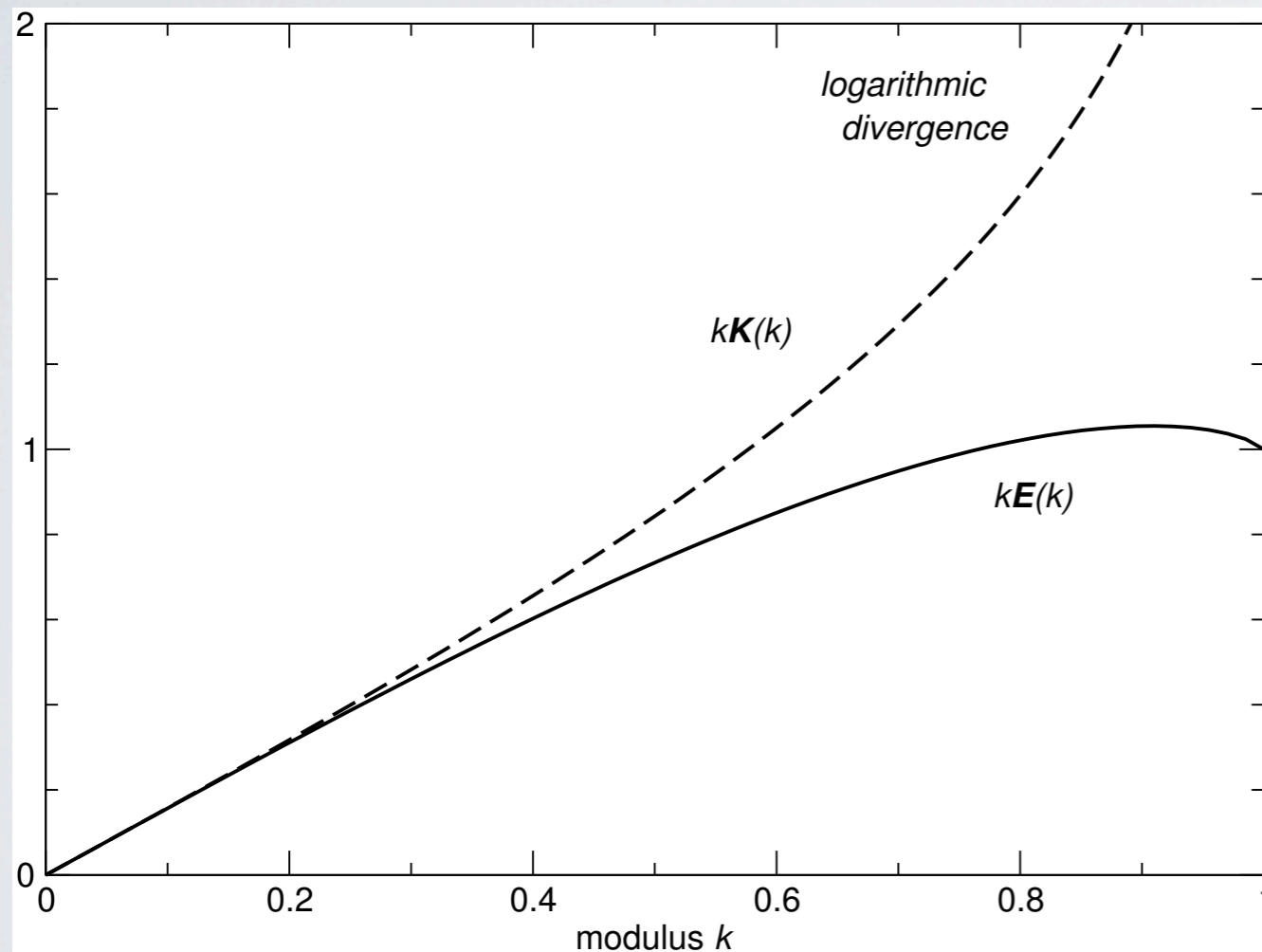
(Durand 1953)



- Expression générale du potentiel gravitationnel :

$$\Psi(\vec{r}) = -G \iiint_v \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}|} dv \xrightarrow{\text{symétrie axiale}} \Psi(R, Z) = -2G \iint_{\Omega} \sqrt{\frac{a}{R}} \rho(a, z) kK(k) da dz$$

(Durand 1953)



Difficulté majeure : divergence de la fonction $K(k)$ quand $k \rightarrow 1$

Méthode classique : Transformation du Noyau de Green en polynômes de Legendre, mais :

- Série infinie alternée
- Troncature
- Multiplicité du calcul intégral

- **Objectif : intégrale exacte selon z ?**

Hypothèse supplémentaire : pas de stratification verticale

$$\partial_z \rho(a, z) = 0$$

$$\Psi(R, Z) = -2G \iint_{\Omega} \sqrt{\frac{a}{R}} \rho(a) k K(k) da dz \longrightarrow \Psi(R, Z) = -G \int_a \wp(a) \Sigma(a) da$$

$$\wp \equiv \frac{\int_z 2 \sqrt{\frac{a}{R}} k K(k) dz}{\int_z dz}$$

Moyenne verticale de la fonction de Green

Nouvelle expression de la fonction de Green:

$$\wp = \sqrt{\frac{a}{R}} \frac{1}{h} \left\{ \int_{z_-}^{z_+} k E(k) dz - [(Z - z) H(m, k)]_{z_-}^{z_+} \right\}$$

(Trova et al. 2012)

$$H = k \left[K(k) - m'^2 \Pi(m, k) \right]$$

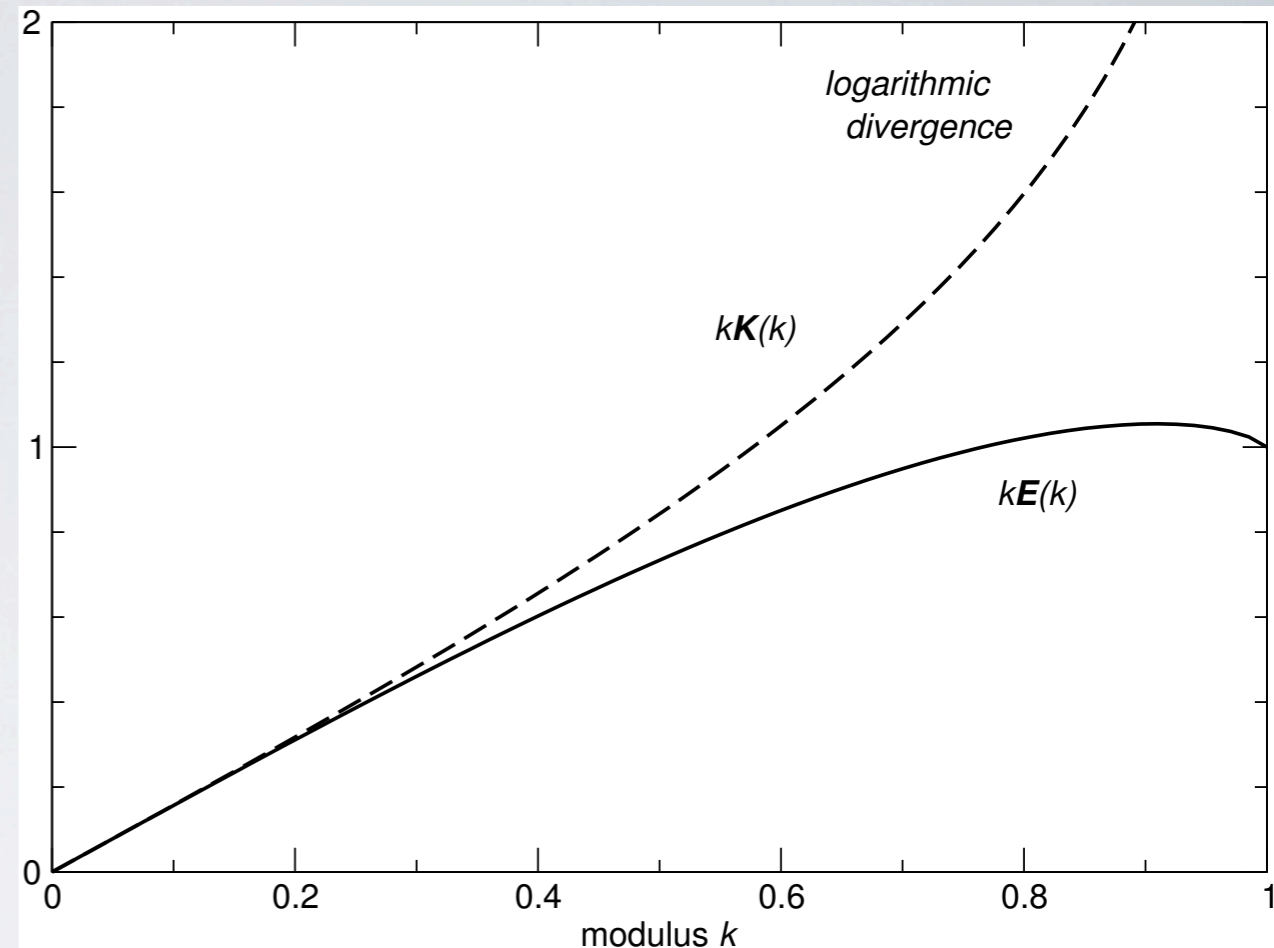
$$\wp = \sqrt{\frac{a}{R}} \frac{1}{h} \left\{ \int_{z_-}^{z_+} kE(k) dz - [(Z-z)H(m,k)]_{z_-}^{z_+} \right\}$$

- Fonction $E(k)$ régulière $\forall k$
- Fonction $(Z-z)H(m,k)$ régulière $\forall k, m$

Nouvelle formule :

- est exacte et générale
- a une seule contrainte : $\partial_z \rho(a, z) = 0 \longrightarrow$
- se comporte comme $-GM/r$ à grand rayon
- peut servir à générer différentes approximations

Mais $\int_{z_-}^{z_+} kE(k) dz$ terme non analytique



pas de stratification verticale

différentes approximations

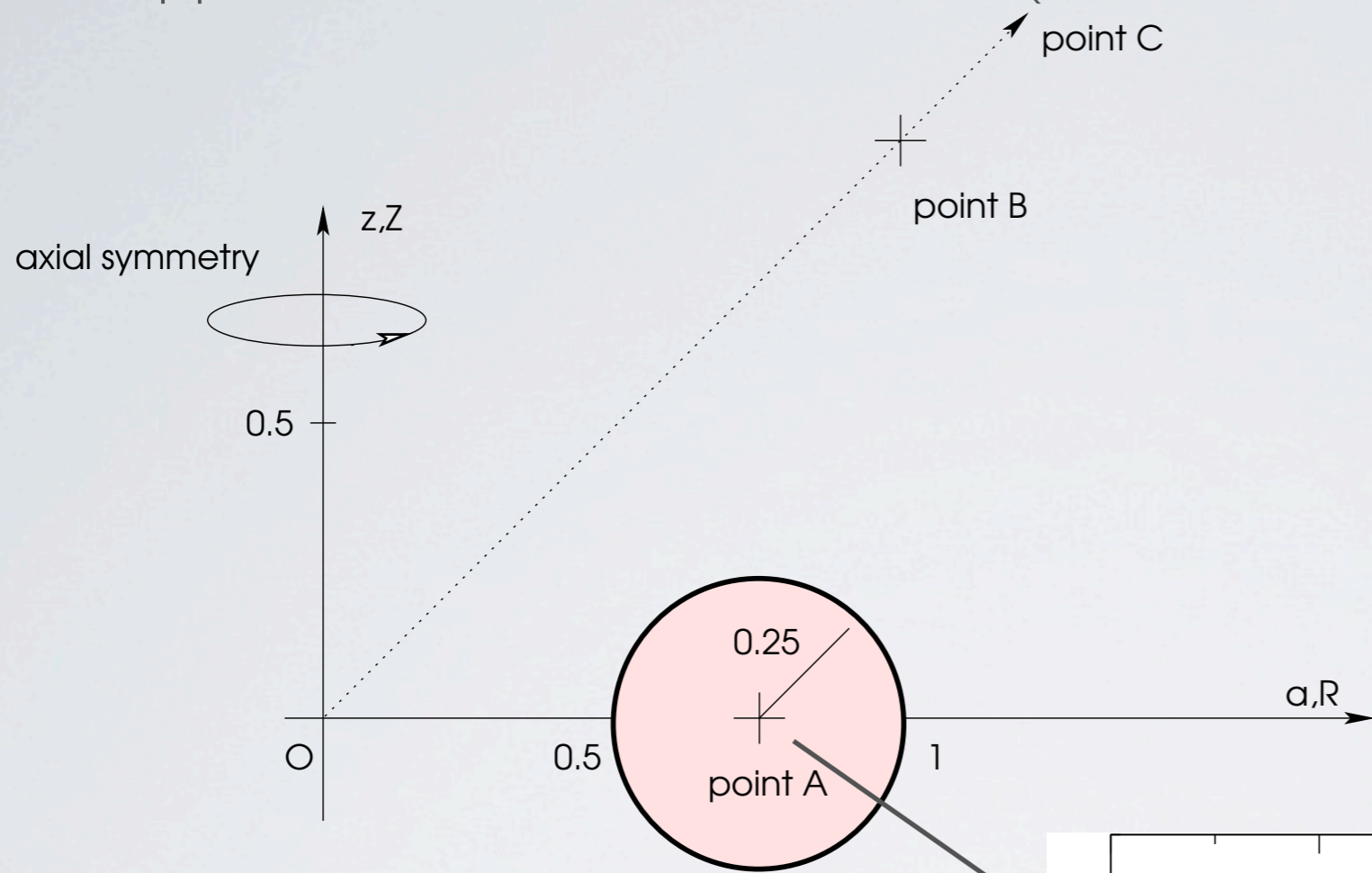
Sensibilité à la stratification verticale ?

- systèmes réalistes → gradient de densité dans les 3 directions
- Tester la sensibilité à la stratification verticale (Masse constante) :

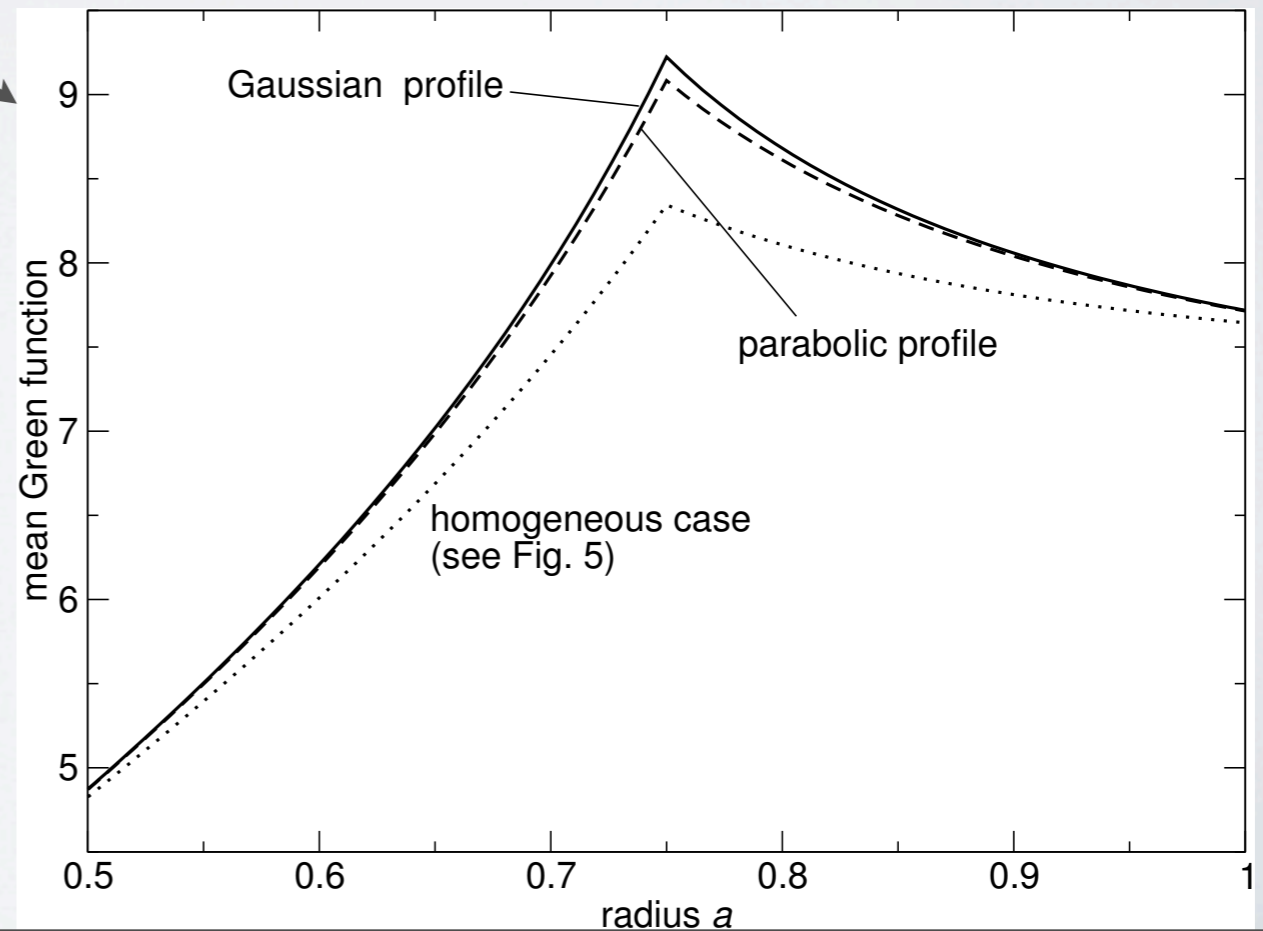
$$\mathcal{D}^{in} \equiv \int_z 2\sqrt{\frac{a}{R}} \rho(z) k K(k) dz / \int_z \rho(z) dz \quad \text{vs} \quad \mathcal{D}$$

- Profil de densité étudié : Gaussien

- Application à un tore circulaire (Bannikova et al. 2011)

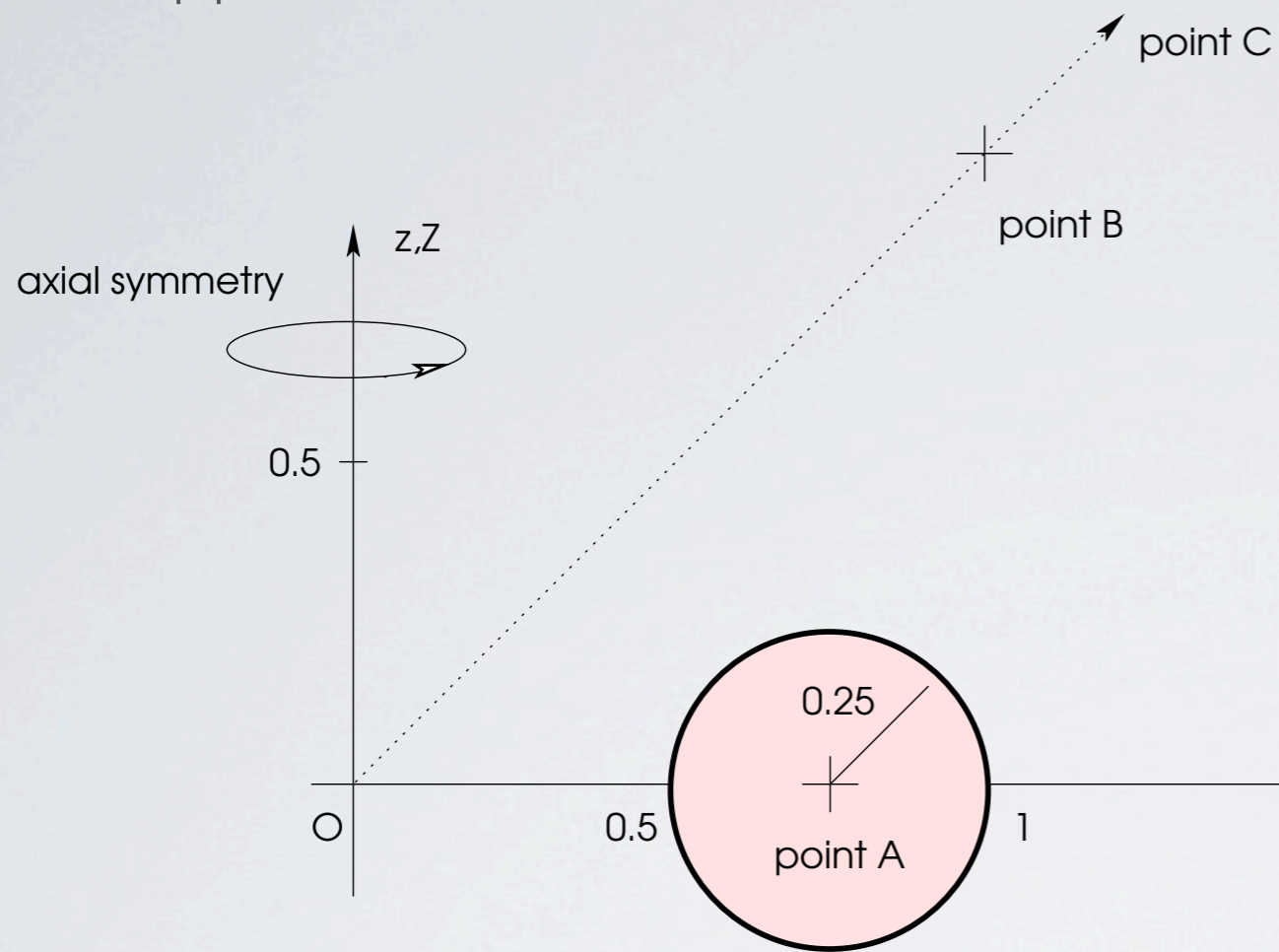


Représentation de la fonction de Green pour un profil Gaussien et homogène en z au point A

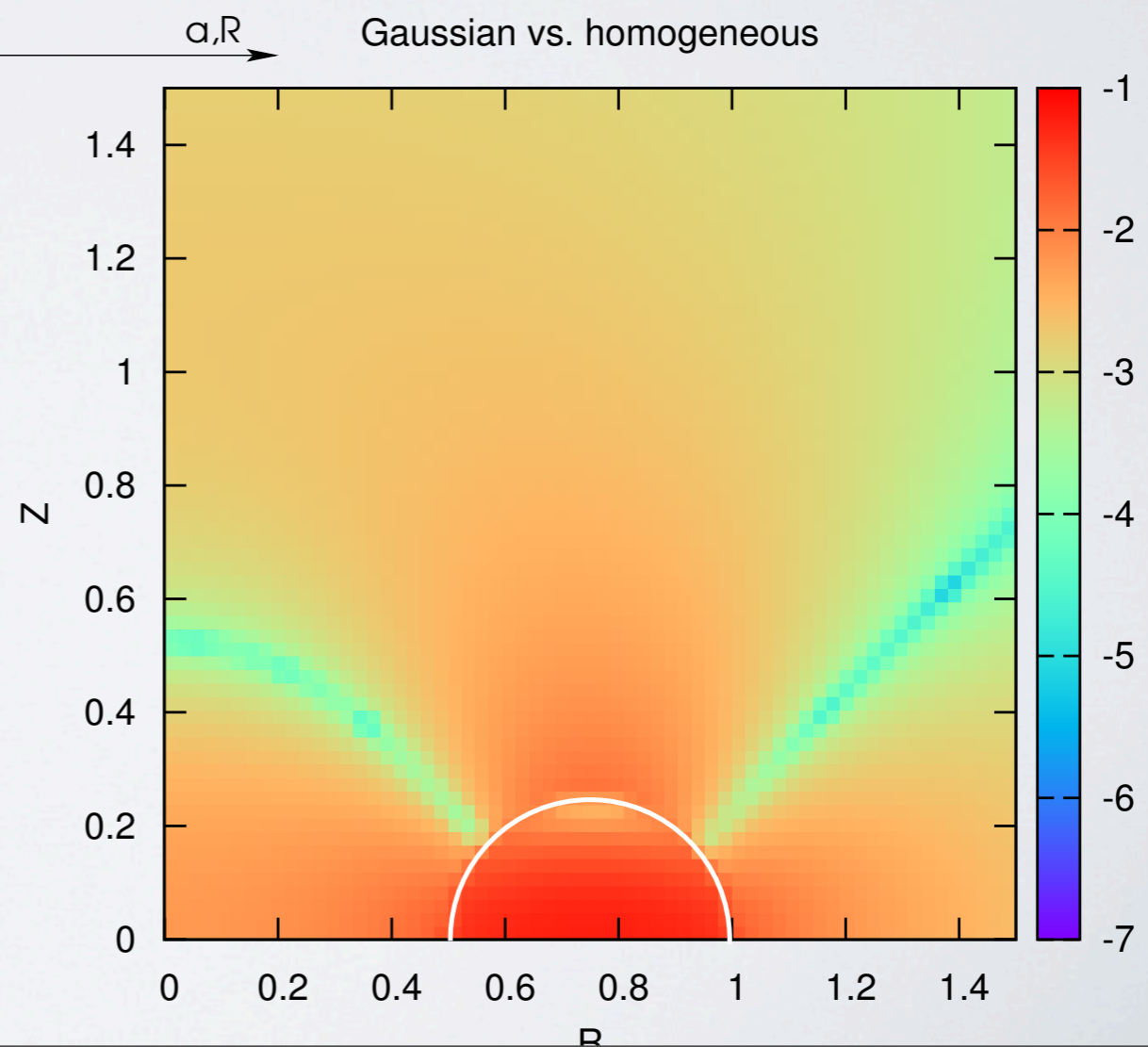


III - Sensibilité à la stratification verticale ?

- Application à un tore circulaire



Représentation de l'erreur entre le potentiel calculé avec la fonction de Green à profil Gaussien et celle à profil homogène



Application au cas des **disques minces** & verticalement homogènes

$$\mathcal{P} = \sqrt{\frac{a}{R}} \frac{1}{h} \left\{ \int_{z_-}^{z_+} kE(k) dz - \left[\frac{(Z-z)H(m,k)}{2h} \right]_{z_-}^{z_+} \right\}$$

- But : obtenir une intégrale simple sur le rayon

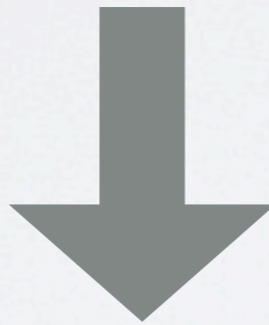
→ approximation de $\int_{z_-}^{z_+} kE(k) dz$

$$\int_{z_-}^{z_+} kE(k) dz \approx T_1(\tilde{k}) - T_2(\tilde{k}) \frac{\sqrt{aR}}{h} \left[\arg \operatorname{sh} \left(\frac{Z-z}{a+R} \right) \right]_{z_-}^{z_+}$$

$$T_2(\tilde{k}) = 2E(\tilde{k}) - K(\tilde{k})$$

$$T_1(\tilde{k}) = \tilde{k} [K(\tilde{k}) - E(\tilde{k})]$$

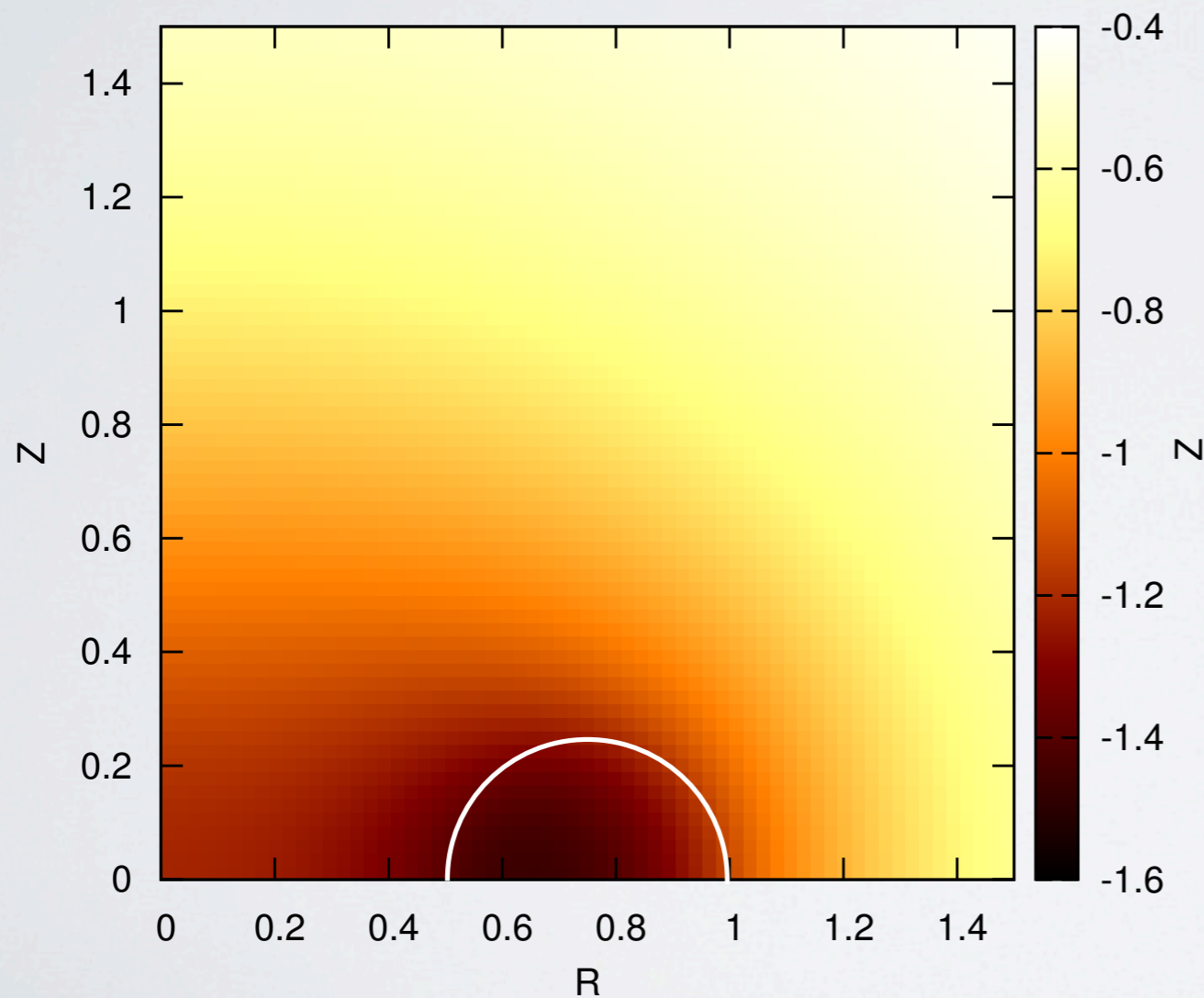
$$\tilde{k} = \frac{k_+ + k_-}{2}$$



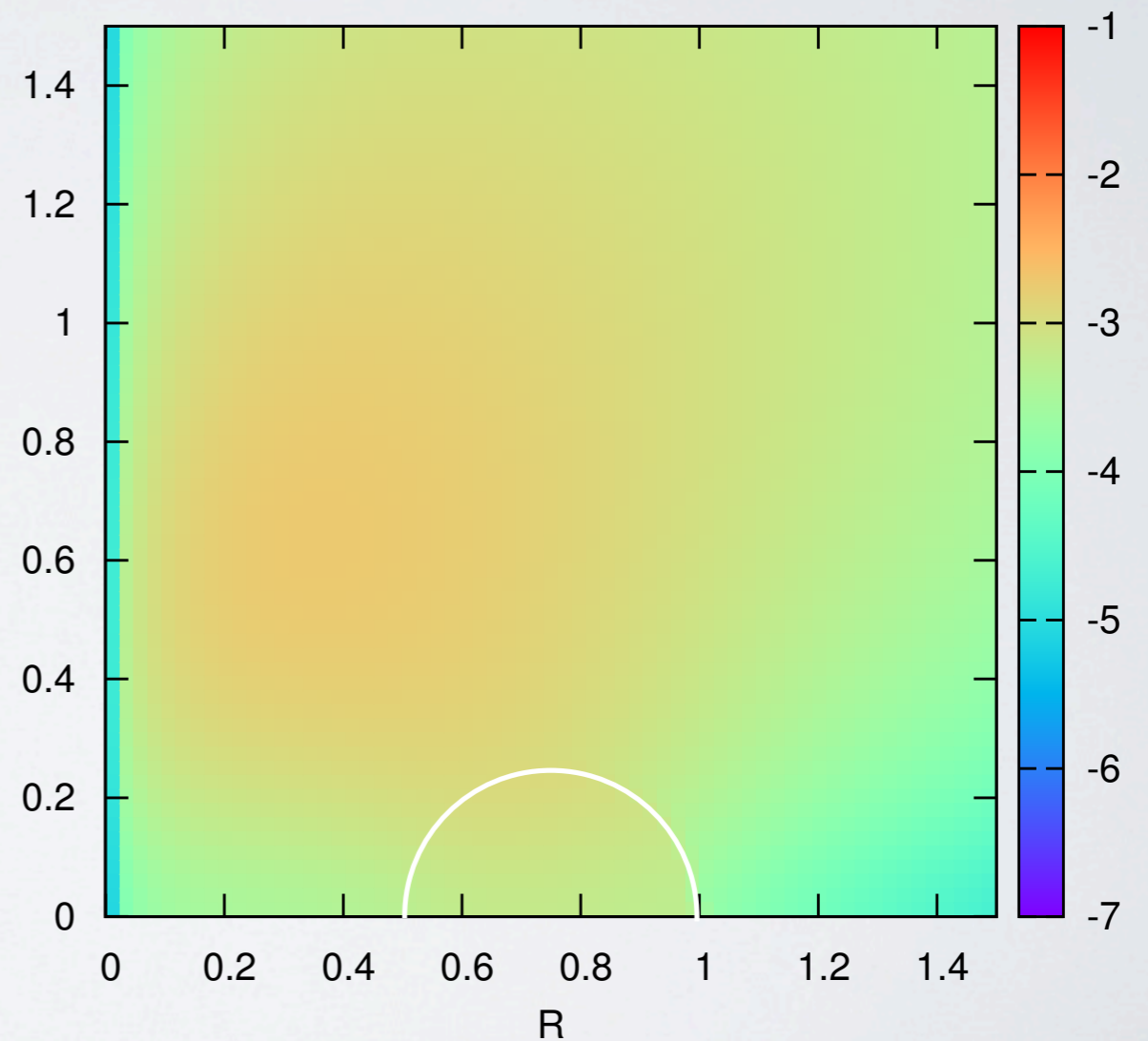
$$\mathcal{P}_{app} = 2\sqrt{\frac{a}{R}} \left\{ T_1(\tilde{k}) - T_2(\tilde{k}) \frac{\sqrt{aR}}{h} \left[\arg \operatorname{sh} \left(\frac{Z-z}{a+R} \right) \right]_{z_-}^{z_+} - \left[\frac{(Z-z)H(m,k)}{2h} \right]_{z_-}^{z_+} \right\} + O\left(\frac{h^4}{16a^4}\right)$$

$$\Psi(R,Z) = -G \int_a \wp(a) \Sigma(a) da \quad \text{vs} \quad \Psi_{app}(R,Z) = -G \int_a \wp_{app}(a) \Sigma(a) da$$

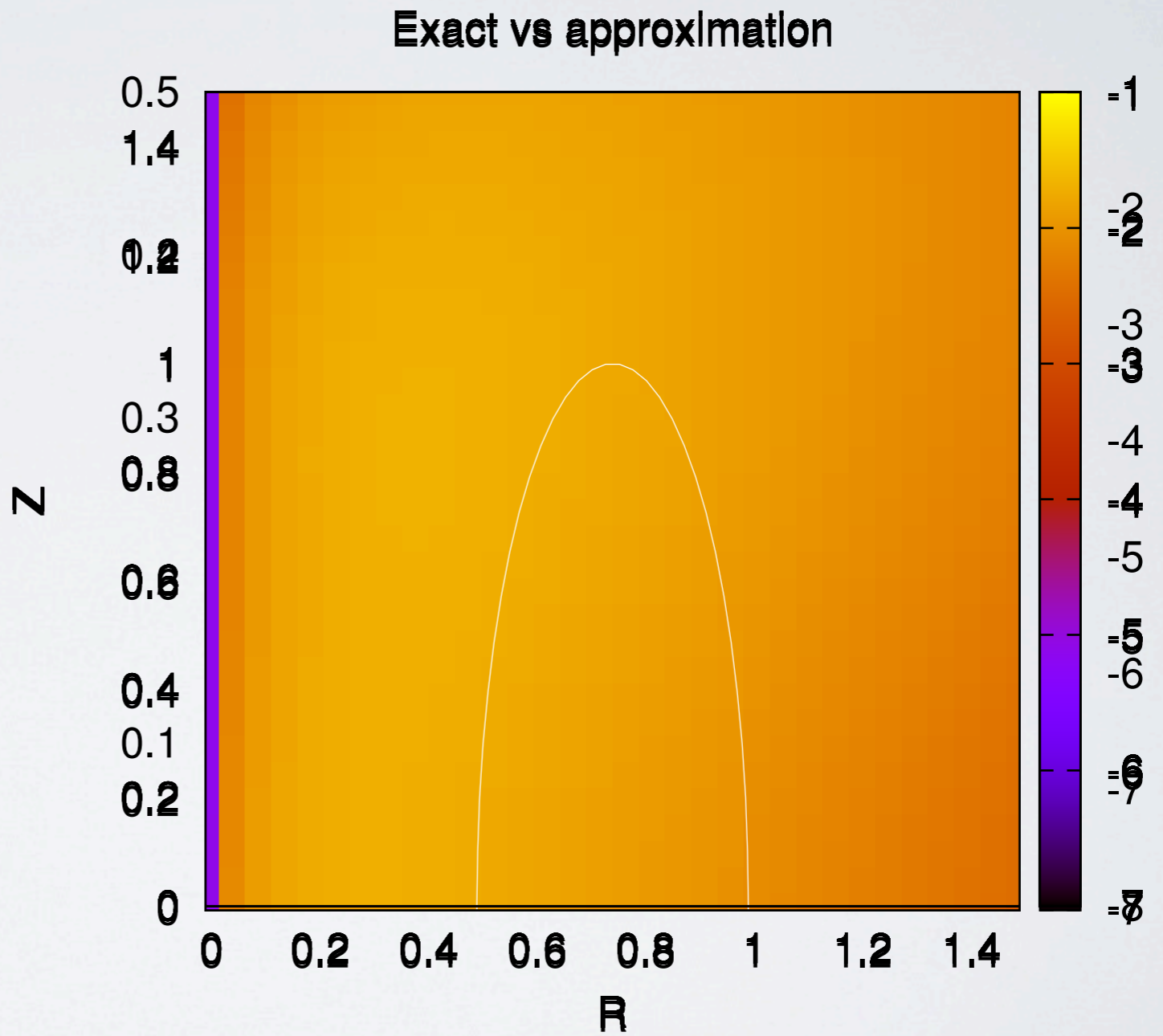
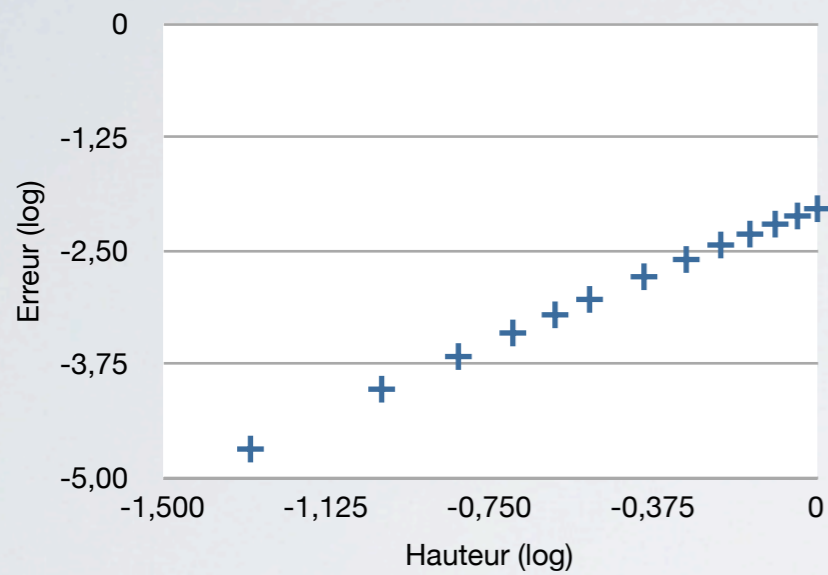
Potentiel calculé avec la fonction de Green
approchée \wp_{app}



exact vs. approximation



Différentes formes de tores (densité homogène)



CONCLUSION

Notre fonction de Green a plusieurs avantages :

- Elle est exacte et générale (aucun hypothèse sur la forme de l'objet)
- Sensibilité assez faible à la stratification verticale
- Elle permet de générer dans le cas des disques minces une très bonne approximation du potentiel gravitationnel.

Perspectives :

- Approximation du champ de gravité vertical des disques
- Critères de stabilité gravitationnelle des disques

Merci de votre attention

Comparaison entre :

$$\int_{z_-}^{z_+} kE(k) dz$$

VS

$$T_1(\tilde{k}) - T_2(\tilde{k}) \frac{\sqrt{aR}}{h} \left[\arg sh \left(\frac{Z-z}{a+R} \right) \right]_{z_-}^{z_+}$$

