Perturbation stochastique du problème des 2-corps

Frédéric PIERRET [1]

Jacky CRESSON [1,2] Bénédicte PUIG [2]

[1]SYRTE/Observatoire de Paris

[2]LMAP/Université de Pau

07/06/2013

Introduction

- Étude de la stabilité du système solaire
- Étude analytique : Newton, Lagrange, Laplace, Poincaré...
  - Théorie KAM, Théorème de Nekhoroshev $\rightarrow$ Critères de stabilité
- Étude numérique : Tremaine, Laskar, Wisdom...
  - Instabilité du système solaire

Introduction

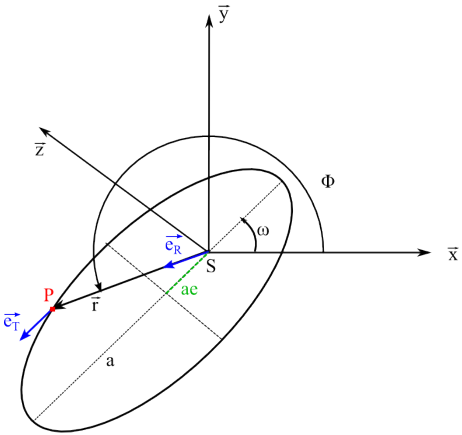
- La modélisation actuelle est-elle complète ?
- Ce qui n'est pas modélisé :
  - bruit de l'environnement
  - phénomènes aléatoires
- Mumford, Nelson ont réfléchi au problème difficile de la prise en compte des effets stochastiques
  - Pour le problème des deux corps cela est clairement expliqué par Mumford [1]
- Sharma a modelisé un problème de perturbation stochastique des 2-corps avec des méthodes de filtrage [3]

Introduction

- Poursuite des travaux de Sharma
- Perturbations stochastiques :
  - identifier ce type de perturbations pour le système solaire
  - que deviennent les propriétés fortes du problème initiale ?
    - exemples : symétries, intégrales premières, structure hamiltonienne
- Source naturelle dans le système solaire :
  - nuage de poussière zodiacale : sa densité fluctue aléatoirement [2]
- Contribution à la dynamique négligée car trop petite
- On va mettre en évidence qu'une modélisation stochastique de ce nuage change les questions usuelles de stabilité à court et long terme

Plan

Le problème des 2-corps



- S le corps central de masse M_S
- P le corps orbitant de masse M_P
- Masse réduite $m = \frac{M_S M_P}{M_S + M_P}$
- Coefficient du potentiel $k = G M_S M_P$
- Éléments orbitaux
  - a : demi-grand axe
  - e : excentricité
  - ω : angle periastre
- ϕ : angle position
- Vecteur position $\vec{r} = r\vec{e_R}$
- Vecteurs de base :
  - $\vec{e_R} = (\cos\phi, \sin\phi, 0)$
  - $\vec{e_T} = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)$

Le problème des 2-corps

$$\mathcal{L}(r,\phi,\dot r,\dot\phi) = \int_a^b \left(\frac{1}{2}m(\dot r^2 + r^2\dot\phi^2) + \frac{k}{r}\right) dt$$

Principe de moindre action

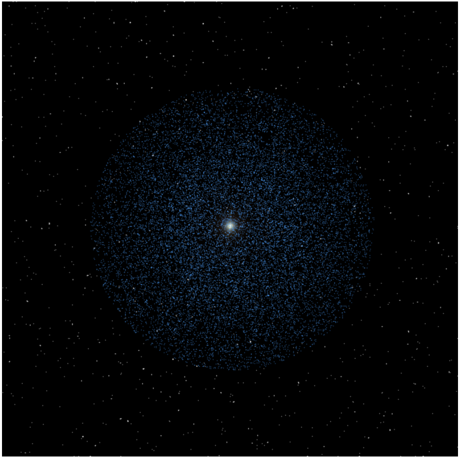
$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{dr}{dt} & = & v \\ \frac{d\phi}{dt} & = & w \\ \frac{dv}{dt} & = & rw^2 - \frac{k}{mr^2} \\ \frac{dw}{dt} & = & -\frac{2vw}{r} \end{array}\right.$$

Symétries et intégrales premières :

Moment angulaire : $M = r^2 w$

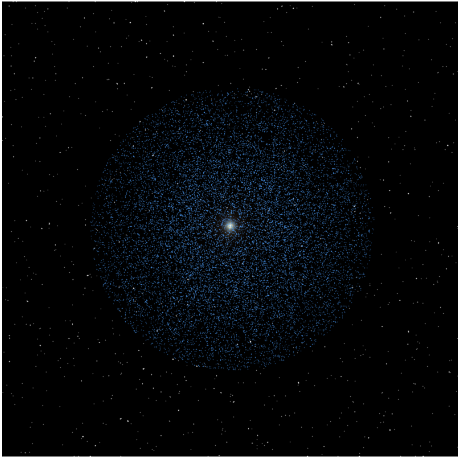
Energie : $E = \frac{1}{2}m(\dot r^2 + r^2\dot\phi^2) - \frac{k}{r}$

Perturbation induite par un nuage de poussière



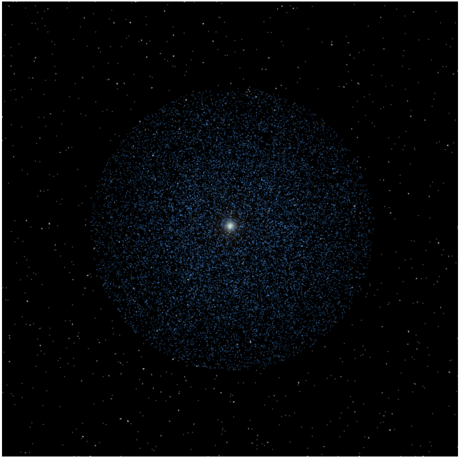
- Force $\vec{F}$ induite par une sphère de poussière à densité ρ constante : $\vec{F} = (\frac{4}{3}\pi G\rho r, 0, 0)$
- Observations $\rightarrow \rho(t) = \sigma W_t^r$ où W_t^r est un "bruit blanc"
- Force $\vec{F}$ induite par une variation moyenne aléatoire de la densité : $\vec{F} = (r\sigma_r W_t^r, 0, 0)$
- Processus physiques $\rightarrow$ $\vec{F} = (r\sigma_r W_t^r, \sigma_\phi W_t^\phi, 0)$ où W_t^ϕ est un "bruit blanc"

Perturbation induite par un nuage de poussière



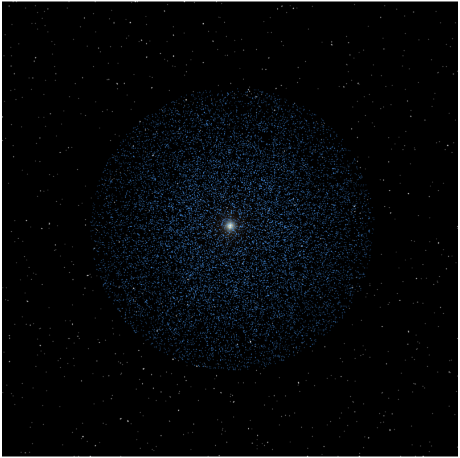
- Force $\vec{F}$ induite par une sphère de poussière à densité ρ constante : $\vec{F} = (\frac{4}{3}\pi G \rho r, 0, 0)$
- Observations $\rightarrow \rho(t) = \sigma W_t^r$ où W_t^r est un "bruit blanc"
- Force $\vec{F}$ induite par une variation moyenne aléatoire de la densité : $\vec{F} = (r\sigma_r W_t^r, 0, 0)$
- Processus physiques $\rightarrow$ $\vec{F} = (r\sigma_r W_t^r, \sigma_\phi W_t^\phi, 0)$ où W_t^ϕ est un "bruit blanc"

Perturbation induite par un nuage de poussière



- Force $\vec{F}$ induite par une sphère de poussière à densité ρ constante : $\vec{F} = (\frac{4}{3}\pi G \rho r, 0, 0)$
- Observations $\rightarrow \rho(t) = \sigma W_t^r$ où W_t^r est un "bruit blanc"
- Force $\vec{F}$ induite par une variation moyenne aléatoire de la densité : $\vec{F} = (r\sigma_r W_t^r, 0, 0)$
- Processus physiques $\rightarrow$ $\vec{F} = (r\sigma_r W_t^r, \sigma_\phi W_t^\phi, 0)$ où W_t^ϕ est un "bruit blanc"

Perturbation induite par un nuage de poussière



- Force $\vec{F}$ induite par une sphère de poussière à densité ρ constante : $\vec{F} = (\frac{4}{3}\pi G \rho r, 0, 0)$
- Observations $\rightarrow \rho(t) = \sigma W_t^r$ où W_t^r est un "bruit blanc"
- Force $\vec{F}$ induite par une variation moyenne aléatoire de la densité : $\vec{F} = (r\sigma_r W_t^r, 0, 0)$
- Processus physiques $\rightarrow$ $\vec{F} = (r\sigma_r W_t^r, \sigma_\phi W_t^\phi, 0)$ où W_t^ϕ est un "bruit blanc"

Perturbation stochastique du problème des 2-corps

Les équations du problème des 2-corps perturbées par une force $\vec{F} = (F_r, F_\phi, 0)$ s'écrivent

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} & = & v \\ \frac{d\phi}{dt} & = & w \\ \frac{dv}{dt} & = & rw^2 - \frac{k}{mr^2} + F_r \\ \frac{dw}{dt} & = & -\frac{2vw}{r} + \frac{F_\phi}{r} \end{cases}$$

Avec la force induite décrite précédemment les équations sont

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} & = & v \\ \frac{d\phi}{dt} & = & w \\ \frac{dv}{dt} & = & rw^2 - \frac{k}{mr^2} + r\sigma_r W_t^r \\ \frac{dw}{dt} & = & -\frac{2vw}{r} + \frac{\sigma_\phi W_t^\phi}{r} \end{cases}$$

Perturbation stochastique du problème des 2-corps

Quel sens donner à ces équations ?

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} & = & v \\ \frac{d\phi}{dt} & = & w \\ \frac{dv}{dt} & = & rw^2 - \frac{k}{mr^2} + r\sigma_r W_t^r \\ \frac{dw}{dt} & = & -\frac{2vw}{r} + \frac{\sigma_\phi W_t^\phi}{r} \end{cases}$$

⇓ Théorie d'Itô des EDS

$$\begin{cases} dr & = & vdt \\ d\phi & = & wdt \\ dv & = & \left(rw^2 - \frac{k}{mr^2}\right) dt + r\sigma_r dB_r \\ dw & = & -\frac{2vw}{r} dt + \frac{\sigma_\phi}{r} dB_\phi \end{cases}$$

où dB_r,dB_ϕ sont des incréments de mouvement brownien

Persistance sous perturbation stochastique

- Intégrale première déterministe : Fonction $I(t)$ constante c'est à dire
$$I(t) = I(0) \text{ ou } \frac{dI(t)}{dt} = 0, \forall t \geq 0$$
- Quel sens donner aux intégrales premières dans le cas stochastique ?
- Intégrale première stochastique forte : Processus $I(t)$ constant presque surement c'est à dire
$$I(t) = I(0) \text{ ou } dI(t) = 0, \forall t \geq 0, p.s$$
- Intégrale première stochastique faible : Processus $I(t)$ dont son espérance est constante c'est à dire
$$\mathbb{E}(I(t)) = \mathbb{E}(I(0)), \forall t \geq 0$$

Persistance sous perturbation stochastique

- Intégrale première déterministe : Fonction $I(t)$ constante c'est à dire
$$I(t) = I(0) \text{ ou } \frac{dI(t)}{dt} = 0, \forall t \geq 0$$
- Quel sens donner aux intégrales premières dans le cas stochastique ?
- Intégrale première stochastique forte : Processus $I(t)$ constant presque surement c'est à dire
$$I(t) = I(0) \text{ ou } dI(t) = 0, \forall t \geq 0, p.s$$
- Intégrale première stochastique faible : Processus $I(t)$ dont son espérance est constante c'est à dire
$$\mathbb{E}(I(t)) = \mathbb{E}(I(0)), \forall t \geq 0$$

Persistance sous perturbation stochastique

- Intégrale première déterministe : Fonction $I(t)$ constante c'est à dire
$$I(t) = I(0) \text{ ou } \frac{dI(t)}{dt} = 0, \forall t \geq 0$$
- Quel sens donner aux intégrales premières dans le cas stochastique ?
- Intégrale première stochastique forte : Processus $I(t)$ constant presque surement c'est à dire
$$I(t) = I(0) \text{ ou } dI(t) = 0, \forall t \geq 0, p.s$$
- Intégrale première stochastique faible : Processus $I(t)$ dont son espérance est constante c'est à dire
$$\mathbb{E}(I(t)) = \mathbb{E}(I(0)), \forall t \geq 0$$

Persistance sous perturbation stochastique

- Intégrale première déterministe : Fonction $I(t)$ constante c'est à dire
$$I(t) = I(0) \text{ ou } \frac{dI(t)}{dt} = 0, \forall t \geq 0$$
- Quel sens donner aux intégrales premières dans le cas stochastique ?
- Intégrale première stochastique forte : Processus $I(t)$ constant presque surement c'est à dire
$$I(t) = I(0) \text{ ou } dI(t) = 0, \forall t \geq 0, p.s$$
- Intégrale première stochastique faible : Processus $I(t)$ dont son espérance est constante c'est à dire
$$\mathbb{E}(I(t)) = \mathbb{E}(I(0)), \forall t \geq 0$$

Persistance sous perturbation stochastique

- Pour calculer la variation d'une fonction f dans la théorie d'Itô dépendant d'un processus stochastique X_t s'écrivant

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s(X_s, s)\, ds + \int_0^t \sigma_s(X_s, s)\, dB_s$$

de manière formelle sous la forme

$$dX_t = \mu_t(X_t, t)dt + \sigma_t(X_t, t)dB_t$$

nous devons utiliser la formule d'Itô :

$$d(f(X_t, t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(X_t, t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, t)\sigma_t^2 dt$$

Persistance sous perturbation stochastique

- Formule Itô sur le moment angulaire M et l'énergie E :

$$dM = r\sigma_\phi dB_\phi$$
$$dE = mrv\sigma_r dB_r + mrw\sigma_\phi dB_\phi + \frac{m}{2}\left[\sigma_r^2 r^2 + \sigma_\phi^2\right] dt$$

- On intègre selon la théorie d'Itô

$$M = M_0 + \int_0^t r\sigma_\phi dB_\phi$$
$$E = E_0 + \int_0^t mrv\sigma_r dB_r + \int_0^t mrw\sigma_\phi dB_\phi + \frac{m}{2}\int_0^t \left[\sigma_r^2 r^2 + \sigma_\phi^2\right] ds$$

- On prend l'espérance de ces quantités

$$\mathbb{E}(M) = M_0$$
$$\mathbb{E}(E) = E_0 + \frac{m}{2}\mathbb{E}\left(\int_0^t \left[\sigma_r^2 r^2 + \sigma_\phi^2\right] ds\right)$$

- Une seule intégrale première faible, le moment angulaire

Persistance sous perturbation stochastique

- Formule Itô sur le moment angulaire M et l'énergie E :

$$dM = r\sigma_\phi dB_\phi$$
$$dE = mrv\sigma_r dB_r + mrw\sigma_\phi dB_\phi + \frac{m}{2}\left[\sigma_r^2 r^2 + \sigma_\phi^2\right] dt$$

- On intègre selon la théorie d'Itô

$$M = M_0 + \int_0^t r\sigma_\phi dB_\phi$$
$$E = E_0 + \int_0^t mrv\sigma_r dB_r + \int_0^t mrw\sigma_\phi dB_\phi + \frac{m}{2}\int_0^t \left[\sigma_r^2 r^2 + \sigma_\phi^2\right] ds$$

- On prend l'espérance de ces quantités

$$\mathbb{E}(M) = M_0$$
$$\mathbb{E}(E) = E_0 + \frac{m}{2}\mathbb{E}\left(\int_0^t \left[\sigma_r^2 r^2 + \sigma_\phi^2\right] ds\right)$$

- Une seule intégrale première faible, le moment angulaire

Persistance sous perturbation stochastique

- Formule Itô sur le moment angulaire M et l'énergie E :

$$dM = r\sigma_\phi dB_\phi$$
$$dE = mrv\sigma_r dB_r + mrw\sigma_\phi dB_\phi + \frac{m}{2}\left[\sigma_r^2 r^2 + \sigma_\phi^2\right] dt$$

- On intègre selon la théorie d'Itô

$$M = M_0 + \int_0^t r\sigma_\phi dB_\phi$$
$$E = E_0 + \int_0^t mrv\sigma_r dB_r + \int_0^t mrw\sigma_\phi dB_\phi + \frac{m}{2}\int_0^t \left[\sigma_r^2 r^2 + \sigma_\phi^2\right] ds$$

- On prend l'espérance de ces quantités

$$\mathbb{E}(M) = M_0$$
$$\mathbb{E}(E) = E_0 + \frac{m}{2}\mathbb{E}\left(\int_0^t \left[\sigma_r^2 r^2 + \sigma_\phi^2\right] ds\right)$$

- Une seule intégrale première faible, le moment angulaire

Persistance sous perturbation stochastique

- Formule Itô sur le moment angulaire M et l'énergie E :

$$dM = r\sigma_\phi dB_\phi$$
$$dE = mrv\sigma_r dB_r + mrw\sigma_\phi dB_\phi + \frac{m}{2}\left[\sigma_r^2 r^2 + \sigma_\phi^2\right] dt$$

- On intègre selon la théorie d'Itô

$$M = M_0 + \int_0^t r\sigma_\phi dB_\phi$$
$$E = E_0 + \int_0^t mrv\sigma_r dB_r + \int_0^t mrw\sigma_\phi dB_\phi + \frac{m}{2}\int_0^t \left[\sigma_r^2 r^2 + \sigma_\phi^2\right] ds$$

- On prend l'espérance de ces quantités

$$\mathbb{E}(M) = M_0$$
$$\mathbb{E}(E) = E_0 + \frac{m}{2}\mathbb{E}\left(\int_0^t \left[\sigma_r^2 r^2 + \sigma_\phi^2\right] ds\right)$$

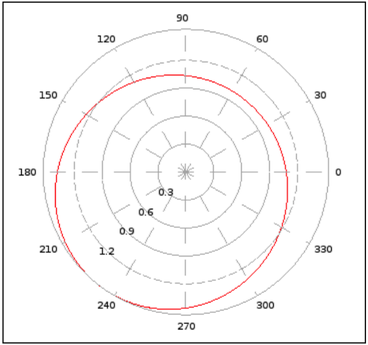
- Une seule intégrale première faible, le moment angulaire

Simulation de trajectoire

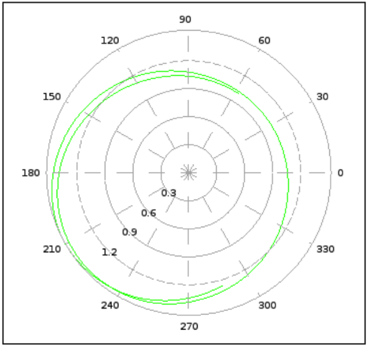
Conditions initiales :

$$r(0) = 1 \text{ AU} \,;\, \phi(0) = 1 \text{ rad} \,;\, v(0) = 0.01 \text{ AU/TU} \,;\, \omega(0) = 1.1 \text{ rad/TU}$$
$$\sigma_r = 0.0121 \text{ TU}^{-3/2} \,;\, \sigma_\phi = 2.2 \times 10^{-4} \text{ AU.TU}^{-3/2}$$

AU : Astronomical Unit, TU : Time Unit

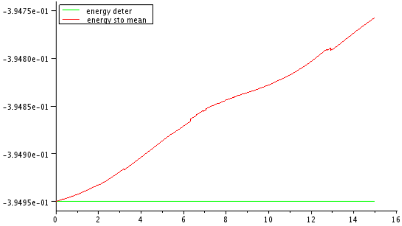


Cas déterministe non perturbé

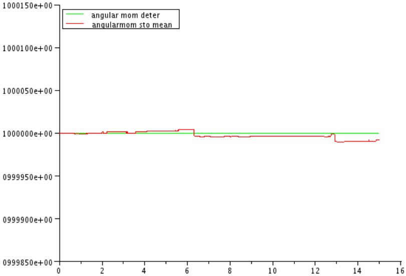


Cas stochastique

Comparaison entre les cas perturbé et non-perturbé (moyenne)

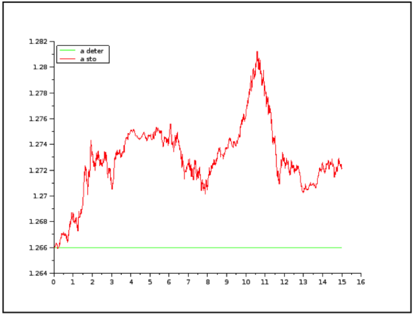


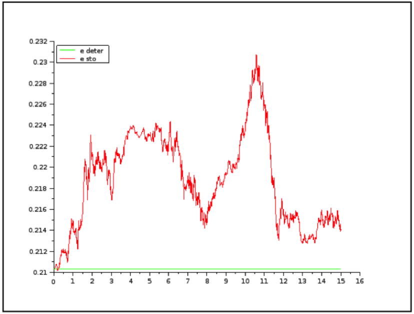
Energie



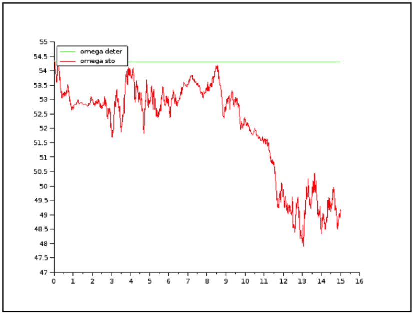
Moment angulaire

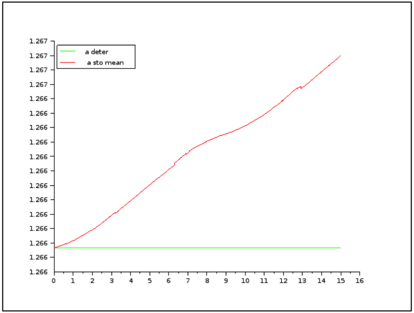
L'intégrateur utilisé respecte bien l'intégrale première faible du moment angulaire

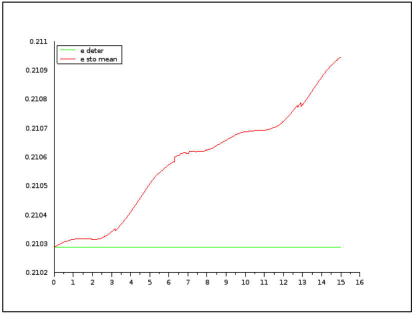




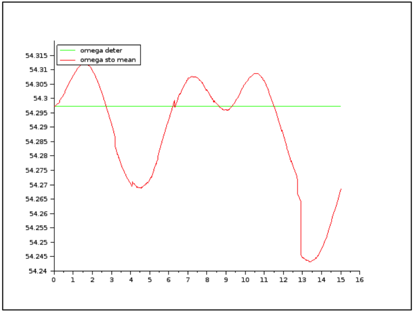
Comparaison des demi-grands axes, de l'excentricité et de l'angle du péricentre entre les cas déterministe et stochastique sur 15 TU



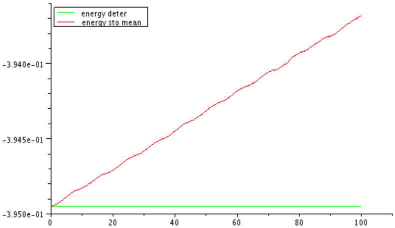




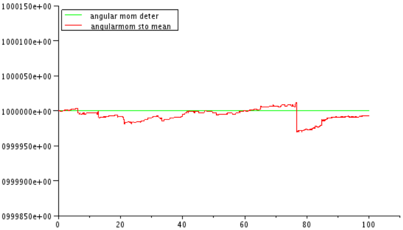
Comparaison des demi-grands axes, de l'excentricité et de l'angle du péricentre entre les cas déterministe et stochastique en moyenne sur 15 TU



Comparaison entre les cas perturbé et non-perturbé (moyenne)

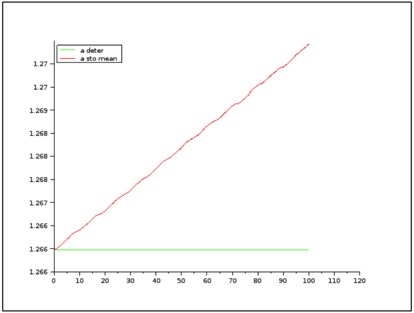


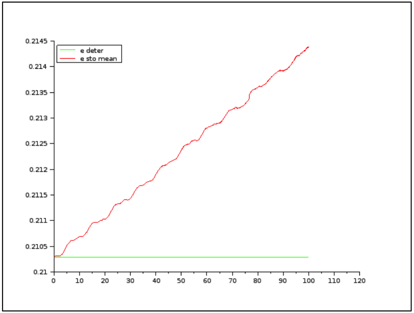
Energie



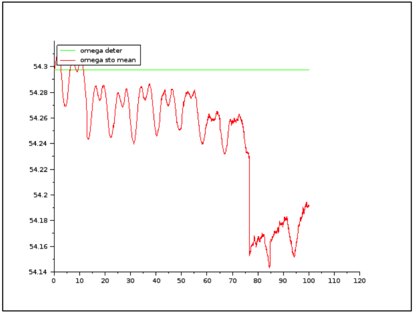
Moment angulaire

L'intégrateur utilisé respecte bien l'intégrale première faible du moment angulaire





Comparaison des demi-grands axes, de l'excentricité et de l'angle du péricentre entre les cas déterministe et stochastique en moyenne sur 100 TU



Nouvelles équations de Gauss pour les perturbations stochastiques (cas planaire)

- On considère une force $\vec{F}$ par unité de masse perturbatrice de nature stochastique

$$d\vec{a}_P = \begin{pmatrix} \bar{R} \\ \bar{T} \\ 0 \end{pmatrix} dt + (\tilde{R}, \tilde{T}, \tilde{N}) \cdot dB$$

où $\tilde{R} = \begin{pmatrix} \tilde{R}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{T}_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $dB = \begin{pmatrix} dB_R \\ dB_T \\ dB_N \end{pmatrix}$

- Remarque : C'est la forme générale pour écrire un processus stochastique de dimension 3

$$
\begin{aligned}
da &= \left[\frac{2a^2}{\sqrt{\mu a(1-e^2)}}\left(e\sin f\bar{R}+(1+e\cos f)\bar{T}\right)+\frac{a^2}{\mu}\left(\tilde{R}^2\left(1+\frac{4e^2\sin^2 f}{1-e^2}\right)+\tilde{T}^2\left(1+\frac{4(1+e\cos f)^2}{1-e^2}\right)\right)\right]dt\\
&+\quad \frac{2a^2}{\sqrt{\mu a(1-e^2)}}\left(e\sin f\tilde{R}+(1+e\cos f)\tilde{T}\right)\cdot dB\\
de &= \left[\sqrt{\frac{a(1-e^2)}{\mu}}\left(\sin f\bar{R}+(\cos f+\cos\epsilon)\bar{T}\right)+\frac{a(1-e^2)\cos^2 f}{2e\mu}\tilde{R}^2\right.\\
&+\quad \left.\frac{2a(1-e^2)}{\mu e}\left(1+\frac{e}{4}(\cos f+\cos\epsilon)\left(\frac{1}{1+e\cos f}+\frac{\cos f+\cos\epsilon}{e}\right)\right)\tilde{T}^2\right]dt\\
&+\quad \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{\mu}}\left(\sin f\tilde{R}+(\cos f+\cos\epsilon)\tilde{T}\right)\cdot dB\\
d\omega &= \left[\sqrt{\frac{a(1-e^2)}{\mu}}\frac{1}{e}\left(-\cos f\bar{R}+\sin f\left(\frac{2+e\cos f}{1+e\cos f}\right)\bar{T}\right)\right.\\
&+\quad \frac{a\left(1-e^2\right)\sin(2f)}{2e^2\mu}\tilde{R}^2+\left(\frac{2a\left(1-e^2\right)\sin f}{e\mu(1+e\cos f)}\cos(2f)\right.\\
&+\quad \left.\left.\frac{a\left(1-e^2\right)}{2e^2\mu}\left(4+\frac{e^2\sin^2 f}{(1+e\cos f)^2}\right)\sin 2f\right)\tilde{T}^2\right]dt\\
&+\quad \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{\mu}}\frac{1}{e}\left(-\cos f\tilde{R}+\sin f\left(\frac{2+e\cos f}{1+e\cos f}\right)\tilde{T}\right)\cdot dB
\end{aligned}
$$

Conclusion et perspectives

- Prise en compte d'effets aléatoires petits $\rightarrow$ changement du comportement dynamique
- Etude et définition de nouveaux critères de stabilité pour les perturbations stochastiques
- Prise en compte de la relativité générale
- Etude de la déformation aléatoire des corps sur la dynamique et la rotation des corps
  - Exemple : Fluctuation du J_2 du Soleil, de la Terre
- Etude et construction d'intégrateur stochastique d'ordre élevés de type Runge-Kutta

Références

Merci !

[1] D. MUMFORD, *The dawning of the age of stochasticity, in Mathematics : Frontiers and perspectives*, AMS, 2000

[2] I. MANN ET AL, *Dust near the sun*, Academic Publishers, 2003.

[3] S. SHARMA, H. PARTHASARATHY, *Dynamics of a stochastically perturbed two-body problem*, Proc. R. Soc. A, 2007.

[4] F. PIERRET, J. CRESSON, B. PUIG, *Stochastic perturbation of the two-body problem*, In preparation.

[5] F. PIERRET, *Stochastic perturbation equations of celestial mechanics*, In preparation.